

# Universidad de Puerto Rico en Aguadilla

Departamento de Matemáticas

Prof. José Neville Díaz Caraballo

## Área Entre Curvas con Polinomios

Cálculo I - Clase de 50 minutos

### 1. Introducción y Motivación (5-10 minutos)

#### Concepto Fundamental

El área entre dos curvas es la integral de la diferencia entre la función superior e inferior.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

donde  $f(x) \geq g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

### 2. Procedimiento General (Paso a Paso)

#### Pasos para resolver:

1. **Graficar las funciones** - visualizar la región
2. **Encontrar puntos de intersección** - resolver  $f(x) = g(x)$
3. **Determinar cuál función está arriba** - evaluar en puntos del intervalo
4. **Configurar la integral** -  $\int [\text{superior} - \text{inferior}] dx$
5. **Evaluar la integral**

### 3. Ejemplos Progresivos

#### Ejemplo 1: Caso Simple (Funciones que no se cruzan)

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad x \in [0, 2]$$

**Solución:**

- **Superior:**  $f(x)$  (claramente  $f(x) > g(x)$ )
- **Área:**

$$A = \int_0^2 [(x^2 + 2) - (x^2 - 1)] dx = \int_0^2 3 dx = 3x \Big|_0^2 = 6$$

#### Ejemplo 2: Intersección en los Extremos

$$f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = x^2$$

##### Paso 1: Encontrar intersecciones

$$4 - x^2 = x^2 \Rightarrow 4 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

##### Paso 2: Configurar integral

Verificar que  $f(x) \geq g(x)$  en  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(4 - x^2) - x^2] dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) dx$$

##### Paso 3: Evaluar

$$A = \left[ 4x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

### Ejemplo 3: Caso Clásico - Paráolas

$$f(x) = -x^2 + 4x, \quad g(x) = x^2 - 2x$$

#### Paso 1: Intersecciones

$$-x^2 + 4x = x^2 - 2x \Rightarrow -2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(6 - 2x) = 0$$

Intersecciones:  $x = 0$  y  $x = 3$

#### Paso 2: Determinar superior (probar $x = 1$ )

$$f(1) = 3, \quad g(1) = -1 \Rightarrow f(x) > g(x)$$

#### Paso 3: Integral

$$A = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx$$

$$A = \left[ -\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 = -18 + 27 = 9$$

## 4. Ejercicios para Práctica en Clase

---

### Nivel Básico

**Problema:** Encontrar el área entre  $f(x) = x + 2$  y  $g(x) = x^2$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 1$

### Solución Completa - Ejemplo 1 Corregido

**Problema:** Encontrar el área entre  $f(x) = x + 2$  y  $g(x) = x^2$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 1$

#### Paso 1: Verificar Intersecciones

Resolver  $f(x) = g(x)$ :

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

**Intersecciones:**  $x = 2$  y  $x = -1$

**Análisis:** Las intersecciones están **fueras** del intervalo  $[0, 1]$ , por lo tanto no hay cruces en nuestra región de interés.

#### Paso 2: Determinar cuál está arriba en $[0,1]$

Probamos  $x = 0.5$ :

- $f(0.5) = 0.5 + 2 = 2.5$
- $g(0.5) = 0.25$

Por lo tanto,  $f(x) = x + 2$  está arriba en todo el intervalo  $[0, 1]$ .

#### Paso 3: Configurar la integral

$$A = \int_0^1 [(x+2) - x^2] dx = \int_0^1 (x+2 - x^2) dx$$

**Paso 4: Evaluar**

$$A = \left[ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$A = \left( \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{3 + 12 - 2}{6} = \frac{13}{6}$$

**Respuesta:**  $A = \frac{13}{6}$  unidades cuadradas

**Gráfica del Ejercicio:**

Ver la visualización interactiva en:

<https://www.desmos.com/calculator/xtqwr6bii2>

## Nivel Intermedio

**Problema 2:**  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ , encontrar intersecciones y área

## Nivel Avanzado

**Problema 3:**  $f(x) = x^3 - x$ ,  $g(x) = x$ , encontrar todas las regiones

## 5. Errores Comunes a Destacar

---

- **No verificar cuál función está arriba** - puede dar área negativa
- **Olvidar encontrar intersecciones** - límites incorrectos
- **No dividir regiones** cuando las funciones se cruzan
- **Errores algebraicos** al simplificar la diferencia

## Procedimiento Correcto (Resumen)

---

### ✓ Pasos para resolver área entre curvas:

1. ✓ **Encontrar TODAS las intersecciones** - resolver  $f(x) = g(x)$
2. ✓ **Verificar si hay intersecciones dentro del intervalo dado**
3. ✓ **Determinar cuál función está arriba** en cada subintervalo
4. ✓ **Configurar la(s) integral(es)** - dividir en regiones si es necesario
5. ✓ **Evaluuar la(s) integral(es)**