

Universidad de Puerto Rico en Aguadilla

Departamento de Matemáticas

Prof. José Neville Díaz Caraballo

Área Entre Curvas con Polinomios

Cálculo I - Clase de 50 minutos

1. Introducción y Motivación (5-10 minutos)

Concepto Fundamental

El área entre dos curvas es la integral de la diferencia entre la función superior e inferior.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

donde $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

2. Procedimiento General (Paso a Paso)

Pasos para resolver:

1. **Graficar las funciones** - visualizar la región
2. **Encontrar puntos de intersección** - resolver $f(x) = g(x)$
3. **Determinar cuál función está arriba** - evaluar en puntos del intervalo
4. **Configurar la integral** - $\int [\text{superior} - \text{inferior}] dx$
5. **Evaluar la integral**

3. Ejemplos Progresivos

Ejemplo 1: Caso Simple (Funciones que no se cruzan)

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad x \in [0, 2]$$

Solución:

- **Superior:** $f(x)$ (claramente $f(x) > g(x)$)
- **Área:**

$$A = \int_0^2 [(x^2 + 2) - (x^2 - 1)] dx = \int_0^2 3 dx = 3x \Big|_0^2 = 6$$

Ejemplo 2: Intersección en los Extremos

$$f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = x^2$$

Paso 1: Encontrar intersecciones

$$4 - x^2 = x^2 \Rightarrow 4 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Paso 2: Configurar integral

Verificar que $f(x) \geq g(x)$ en $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(4 - x^2) - x^2] dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) dx$$

Paso 3: Evaluar

$$A = \left[4x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

Ejemplo 3: Caso Clásico - Parábolas

$$f(x) = -x^2 + 4x, \quad g(x) = x^2 - 2x$$

Paso 1: Intersecciones

$$-x^2 + 4x = x^2 - 2x \Rightarrow -2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(6 - 2x) = 0$$

Intersecciones: $x = 0$ y $x = 3$

Paso 2: Determinar superior (probar $x = 1$)

$$f(1) = 3, \quad g(1) = -1 \Rightarrow f(x) > g(x)$$

Paso 3: Integral

$$A = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx$$

$$A = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 = -18 + 27 = 9$$

4. Ejercicios para Práctica en Clase

Nivel Básico

Problema: Encontrar el área entre $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$

Solución Completa - Ejemplo 1 Corregido

Problema: Encontrar el área entre $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$

Paso 1: Verificar Intersecciones

Resolver $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned}x + 2 &= x^2 \\x^2 - x - 2 &= 0 \\(x - 2)(x + 1) &= 0\end{aligned}$$

Intersecciones: $x = 2$ y $x = -1$

Análisis: Las intersecciones están **fuera** del intervalo $[0, 1]$, por lo tanto no hay cruces en nuestra región de interés.

Paso 2: Determinar cuál está arriba en $[0, 1]$

Probamos $x = 0.5$:

- $f(0.5) = 0.5 + 2 = 2.5$
- $g(0.5) = 0.25$

Por lo tanto, $f(x) = x + 2$ está arriba en todo el intervalo $[0, 1]$.

Paso 3: Configurar la integral

$$A = \int_0^1 [(x+2) - x^2] dx = \int_0^1 (x+2-x^2) dx$$

Paso 4: Evaluar

$$A = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$A = \left(\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{3+12-2}{6} = \frac{13}{6}$$

Respuesta: $A = \frac{13}{6}$ unidades cuadradas

Gráfica del Ejercicio:

Ver la visualización interactiva en:

<https://www.desmos.com/calculator/xtqwr6bii2>

Nivel Intermedio

Problema 2: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, encontrar intersecciones y área

Nivel Avanzado

Problema 3: $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x$, encontrar todas las regiones

5. Errores Comunes a Destacar

- **No verificar cuál función está arriba** - puede dar área negativa
- **Olvidar encontrar intersecciones** - límites incorrectos
- **No dividir regiones** cuando las funciones se cruzan
- **Errores algebraicos** al simplificar la diferencia

Procedimiento Correcto (Resumen)

✓ Pasos para resolver área entre curvas:

1. ✓ **Encontrar TODAS las intersecciones** - resolver $f(x) = g(x)$
2. ✓ **Verificar si hay intersecciones dentro del intervalo dado**
3. ✓ **Determinar cuál función está arriba** en cada subintervalo
4. ✓ **Configurar la(s) integral(es)** - dividir en regiones si es necesario
5. ✓ **Evaluar la(s) integral(es)**