Geometría: Descartes y el Plano Cartesiano

Prof. José Neville Díaz Caraballo
UPR – Aguadilla

math.uprag.edu/diaz.html

Geometría: Descartes y el Plano Cartesiano

El plano cartesiano

Teorema de Pitágoras

Fórmula de la distancia y punto medio

Ecuaciones lineales

Triángulos y círculos

“Los malos libros provocan malas costumbres y las malas costumbres provocan buenos libros”.

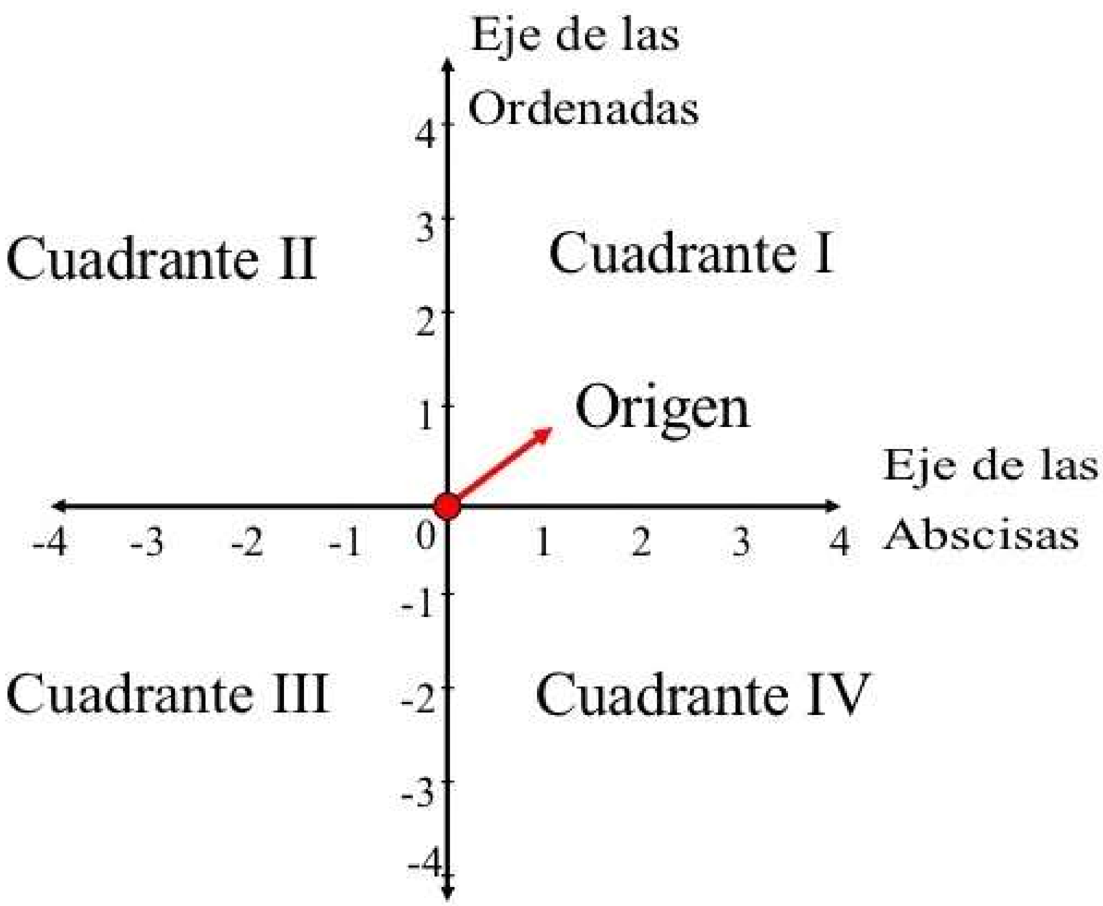
René Descartes

“Para investigar la verdad es preciso dudar, en cuanto sea posible, de todas las cosas”.

Plano Cartesiano

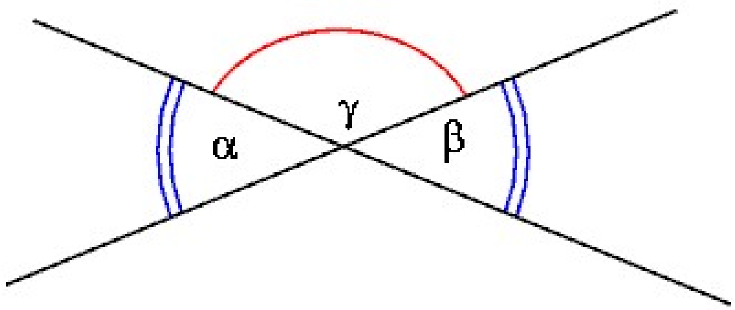
Plano Cartesiano: Es el plano formado por la intersección de dos rectas perpendiculares usadas para representar pares ordenados.

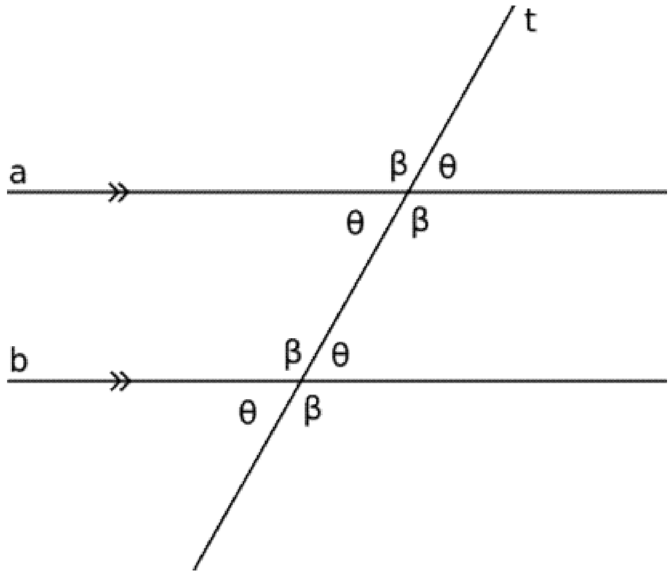
Cartesiano: Cartesis, forma latinizada que escribía su nombre.



Ir a hoja de ejercicios problema 1

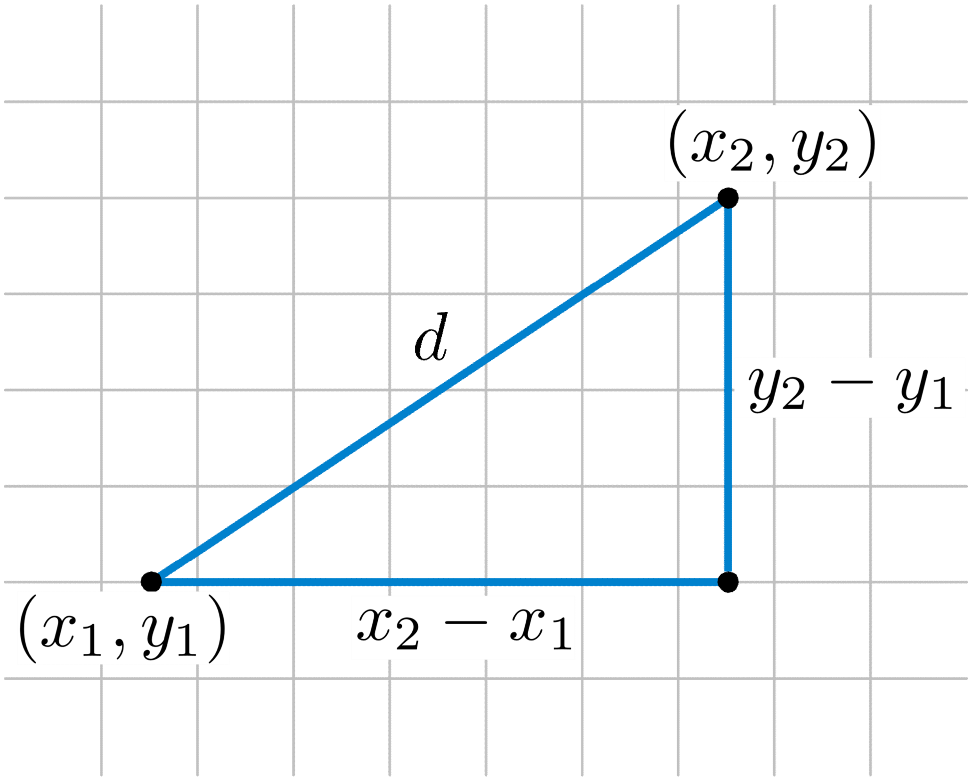
Angulos congruentes: Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.





Fórmula de la distancia

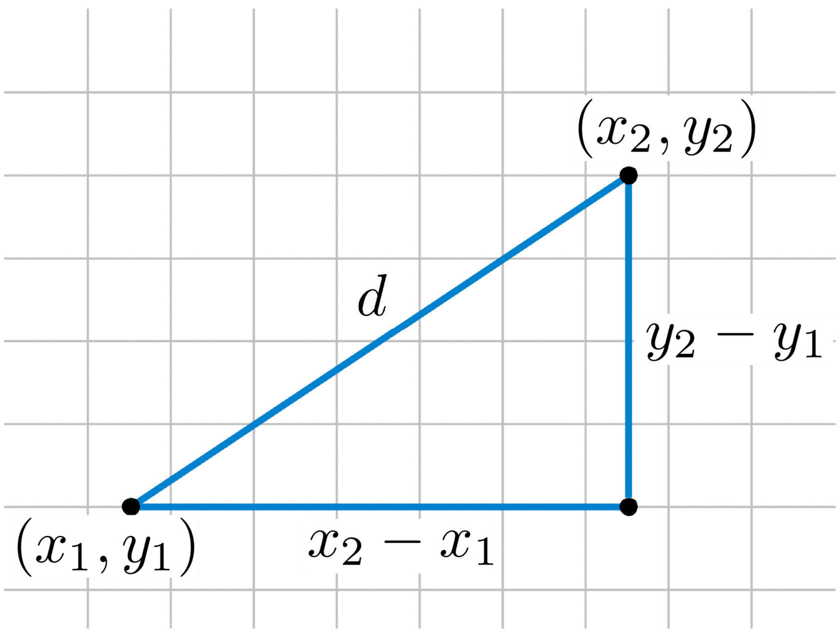
Dado dos puntos encuentra la distancia entre ellos.
Vamos a desarrollar la fórmula de la distancia.



$$base^2 + altura^2 = hipotenusa^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Fórmula del punto medio

El punto medio de un segmento definido por las coordenadas de sus extremos $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Encontrar el punto medio entre los puntos A(2,3) & B(-3,5)

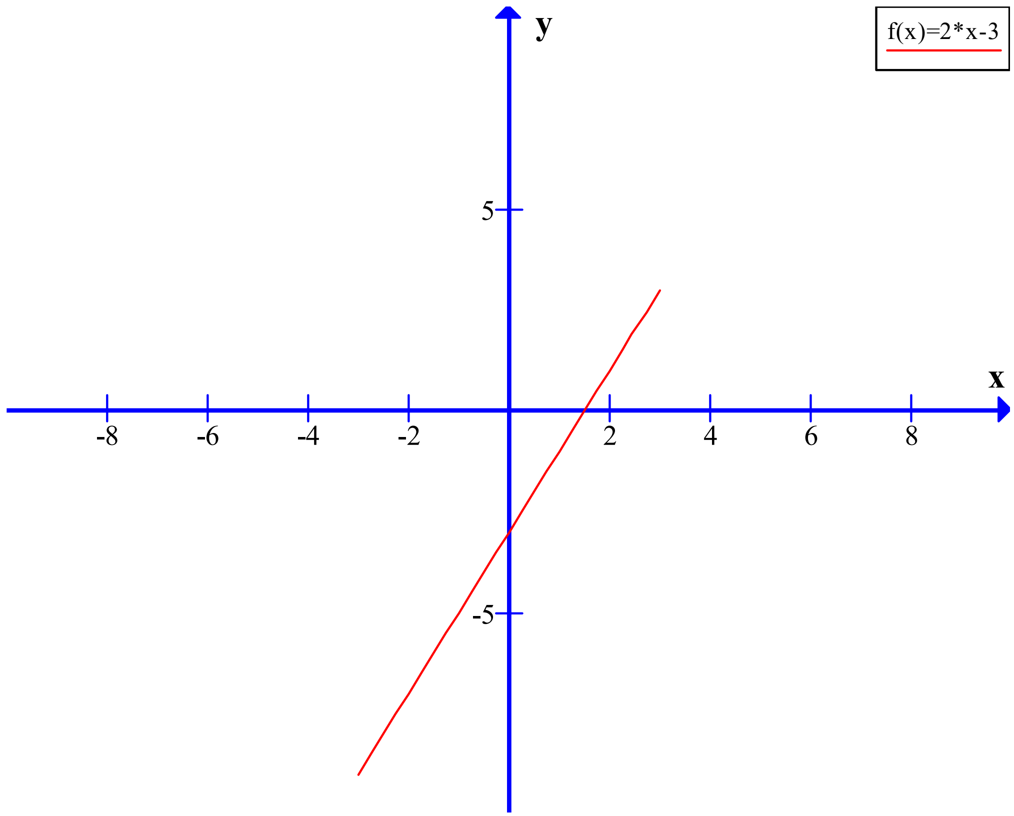
Ir a hoja de ejercicios, problema 5 y 6

Ecuaciones lineales

La gráfica de una ecuación en x & y es el conjunto de todos los puntos (x,y) en el plano cartesiano que satisface la ecuación.

Hacer la gráfica de $2x-y=3$

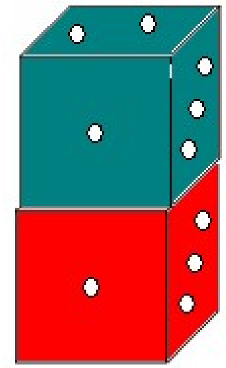
x	y
-2	-7
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3



y
f(x)=2*x-3
5
x
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
-5

¿Si tienes una **torre** de veinte dados, ¿cuál es la cantidad de caras visibles?

x	y
1	5
2	9
3	13

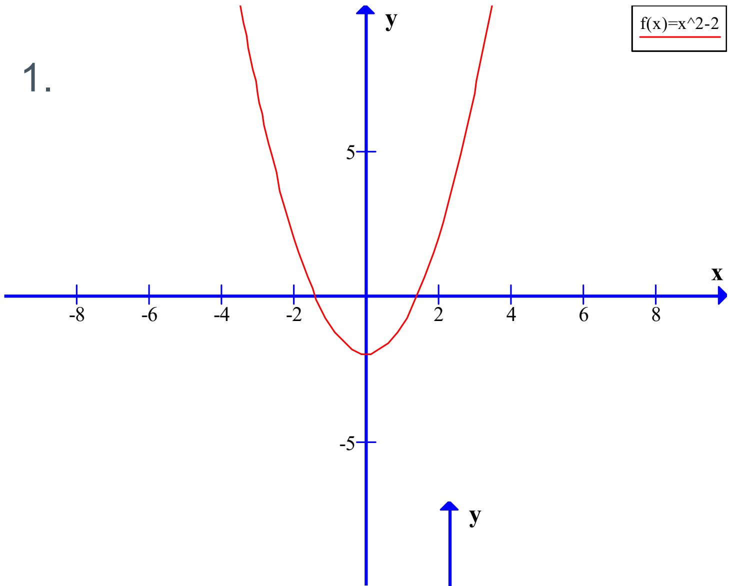


Ir a hoja de ejercicios, problema 7 y 8

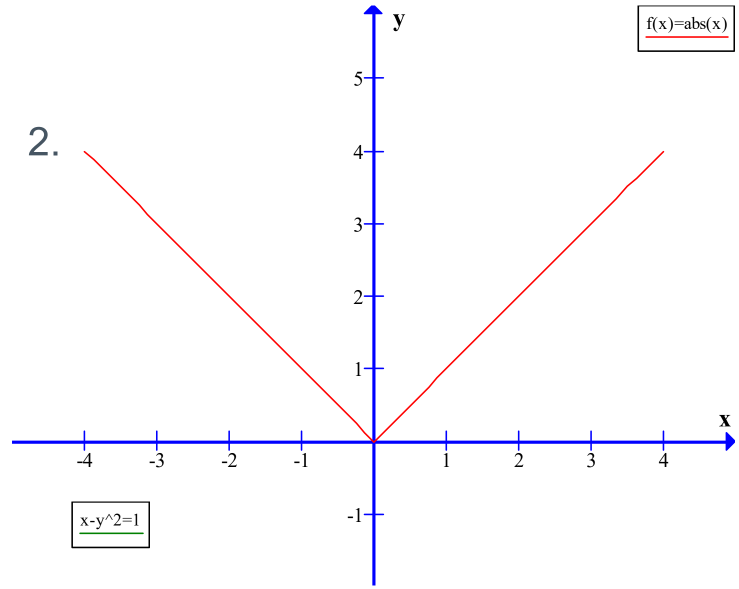
Hacer las siguientes gráficas

1. $y = x^2 - 2$
2. $y = |x|$
3. $x = y^2 + 1$

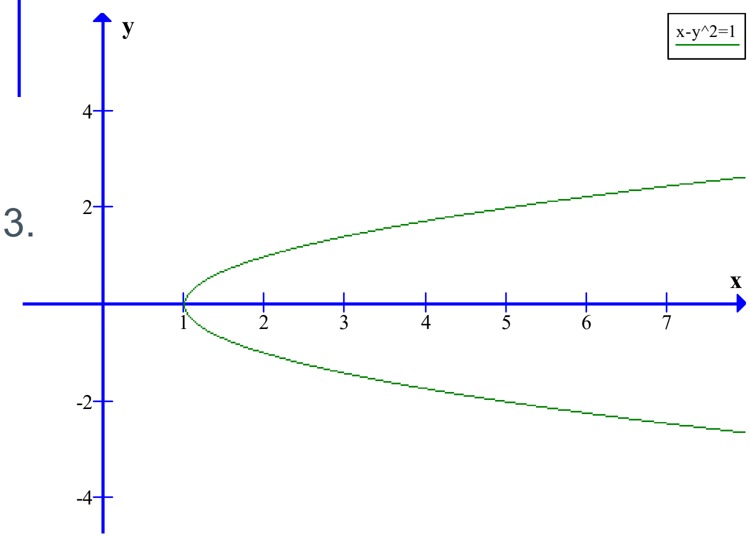
1.


f(x)=x^2-2
y
x
5
-5
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8

2.


f(x)=abs(x)
y
x
5
4
3
2
1
-1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

3.


x-y^2=1
y
x
4
2
-2
-4
1
2
3
4
5
6
7

Los interceptos son los puntos donde las coordenadas de x & y tienen valor cero.

El intercepto en x → y=0 (a,0)

El intercepto en y → x=0 (0,b)

Dada la siguiente ecuación $y = x^3 + 1$ encuentre los interceptos.

Solución: Intercepto en x

$$0 = x^3 + 1$$
$$x^3 = -1$$
$$x = -1 \qquad (-1,0)$$

Intercepto en y

$$y = x^3 + 1$$
$$y = 0^3 + 1$$
$$y = 1 \qquad (0,1)$$

Ir a la hoja de ejercicio, problema 9 & 10

Encuentre los interceptos en X & Y:

1. $y = -x^2 - 5x$

2. $y = x^2 - 5x + 6$

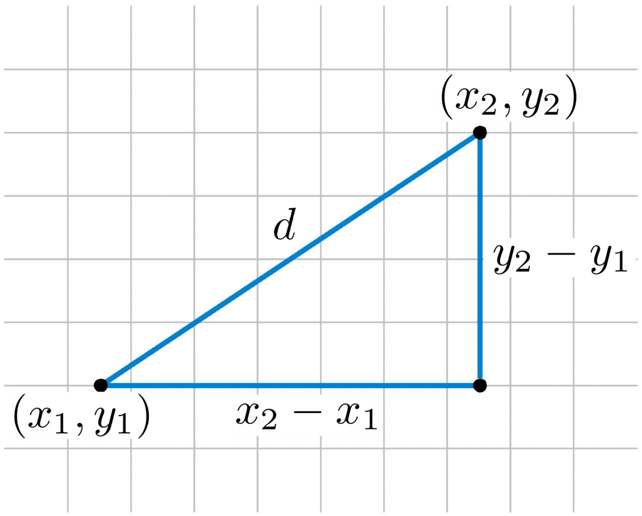
3. $y = \sqrt{x - 2}$

4. $y = \frac{3x-1}{4x-2}$

El modelo matemático más simple es la ecuación lineal (relación lineal)

$$y = mx + b$$

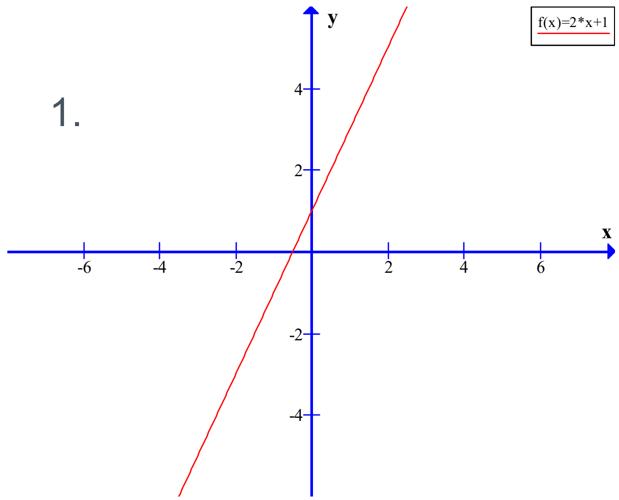
m=pendiente b=intercepto en y (0, b)



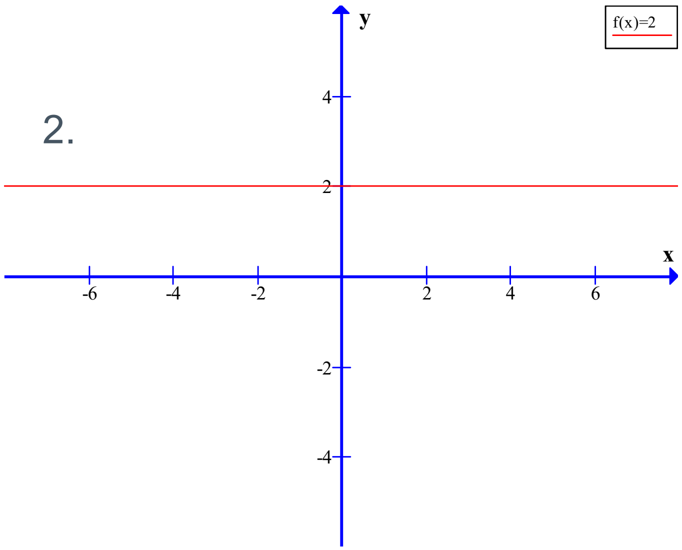
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hacer la gráfica de:

1. $y = 2x + 1$

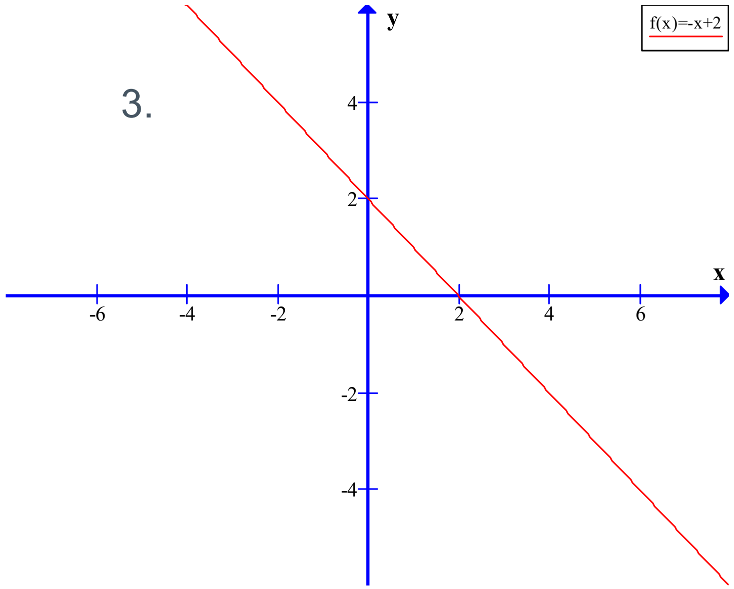


2. $y = 2$



3. $x + y = 2$

3.



Dado dos puntos (-2,0) & (3,1) encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos.

$$m = \frac{1-0}{3-(-2)} = \frac{1}{5}$$

Ahora recuerde que $y = mx + b \;\; \rightarrow \;\; y = \frac{1}{5}x + b$

Los puntos satisfacen la ecuación, es decir,

$$0 = \frac{1}{5}(-2) + b$$

$$b = \frac{2}{5}$$

Nuestra ecuación lineal es $y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$

Verificar usando el otro punto

$$1 = \frac{1}{5}(3) + \frac{2}{5}$$

$$1 = 1$$

Forma punto Pendiente

La ecuación de la línea con pendiente m que pasa por (x_1, y_1) es $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ir a la hoja problema 11

Rectas paralelas y perpendiculares

1. Dos rectas son paralelas si y solo si m_1=m_2
2. Dos rectas son perpendiculares si y solo si m_1=$\frac{1}{m_2}$

Equivalente a $m_1 * m_2 = -1$

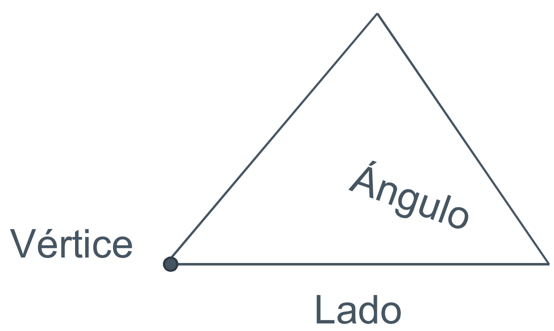
Ejemplos: Verifique si las rectas son paralelas

$$2y - 6x + 4 = 0 \quad \& \quad y = 3x + 5$$

Triángulos

El Triángulo: se define como un polígono de tres lados.

Sus elementos primarios son: lados, ángulos y vértices



La Desigualdad Triangular
Postulado sobre la existencia de un triángulo

Un triángulo queda determinado cuando la suma de las medidas de cualesquiera dos de sus lados es siempre mayor que el tercer lado.

Por ejemplo: Un triángulo cuyos lados miden 3cm, 4cm y 5cm existe…

Pero es imposible tener un triángulo cuyos lados midan 3cm, 4cm y 10cm

Clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos internos

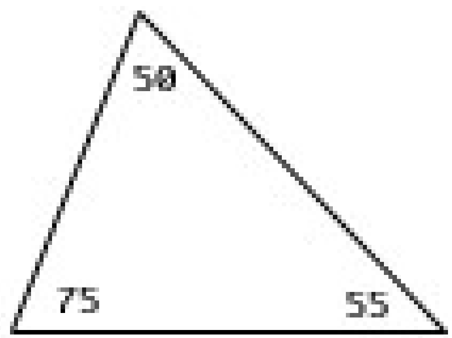
1) **Triángulo acutángulo**: Sus tres ángulos internos son agudos, esto es, **sus tres ángulos internos miden menos de 90 grados.**

2) **Triángulo rectángulo**: El triángulo tiene un ángulo recto, esto es, **tiene un ángulo que mide 90 grados.**

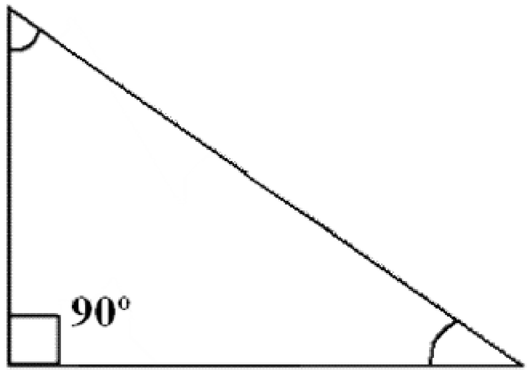
3) **Triángulo obtusángulo**: El triángulo tiene un ángulo obtuso, esto es, **tiene un ángulo que mide más de 90 grados**

* **Nota 1:** Recordemos que los tres ángulos internos de un triángulo suman 180 grados. **¿Cómo lo podemos demostrar?**

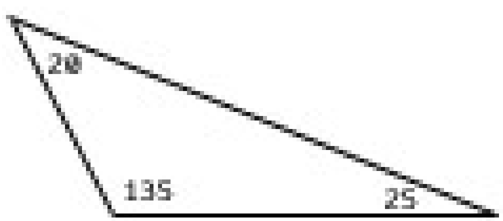
* **Nota 2:** En todo triángulo, el ángulo mayor se opone al lado mayor.



Ej) Triángulo Acutángulo

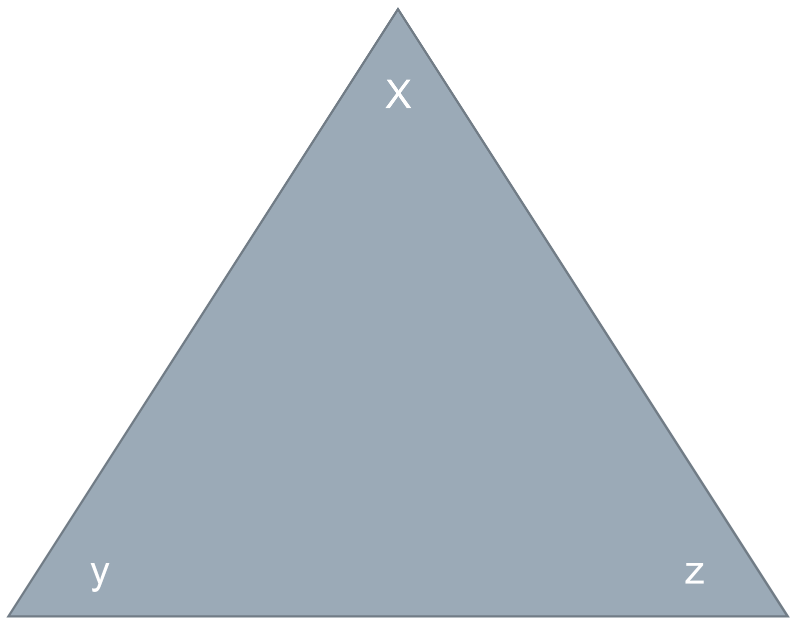


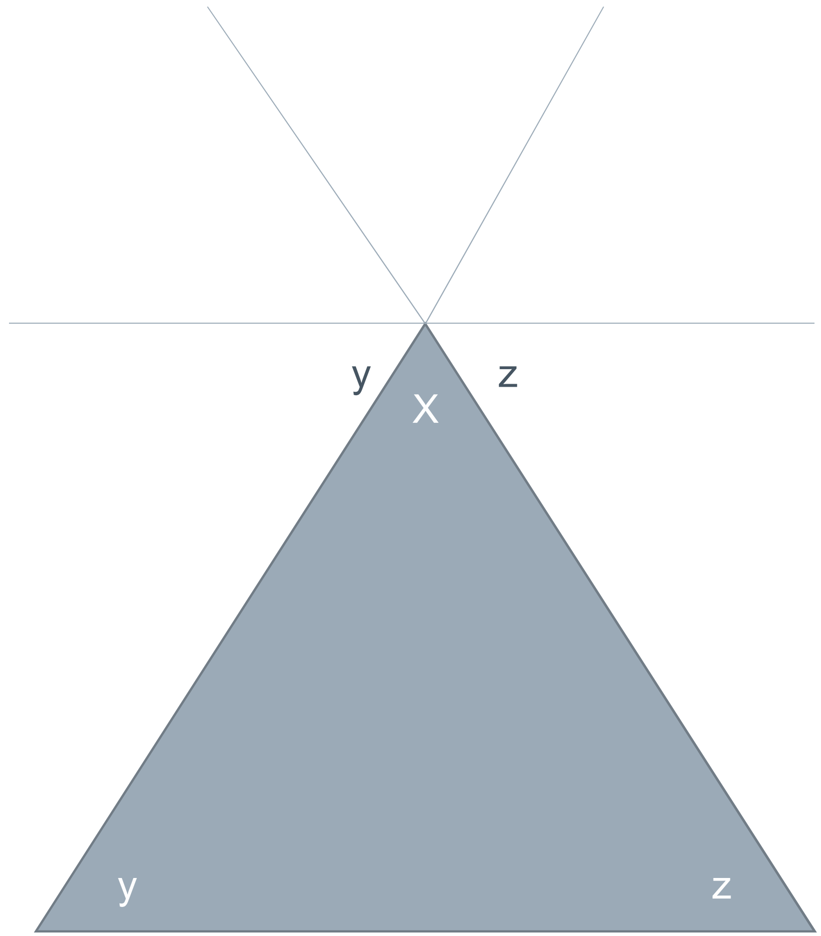
Ej) Triángulo Rectángulo



Ej) Triángulo Obtusángulo

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados.

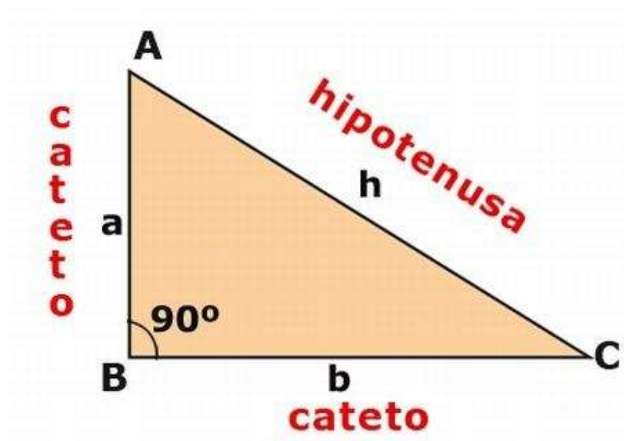




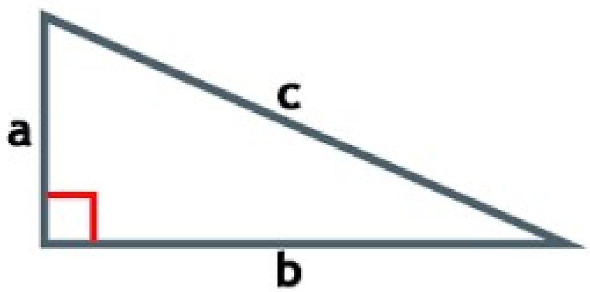
y
z
x
y
z

Nota: En todo triángulo el ángulo mayor va opuesto al lado mayor.

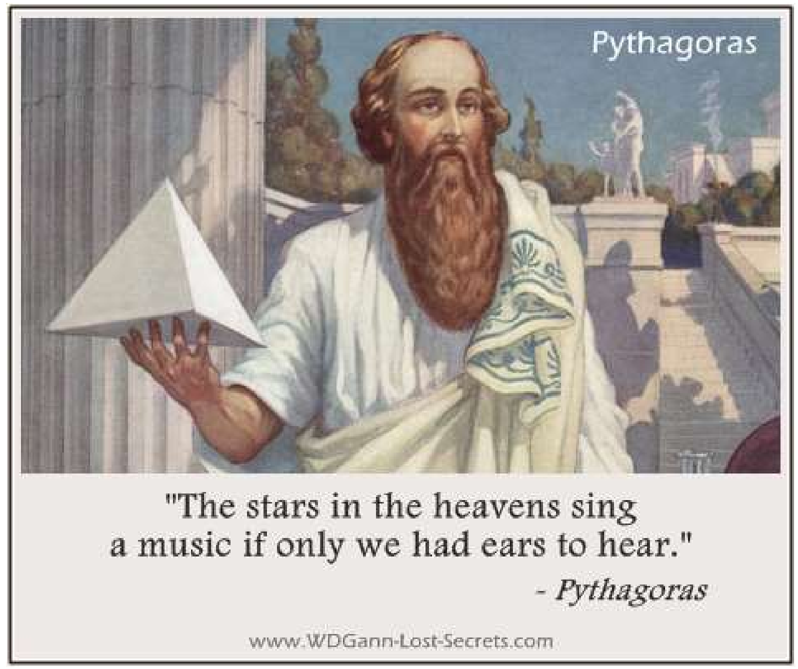
Los lados que forman el ángulo de 90º se llaman CATETOS y el lado opuesto al ángulo recto se llama HIPOTENUSA y es el lado más largo del triángulo.



Importante: Los únicos triángulos que satisfacen el teorema de Pitágoras son los triángulos rectángulos.



$$a^2 + b^2 = c^2$$



Teorema de Pitágoras

En todo triangulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

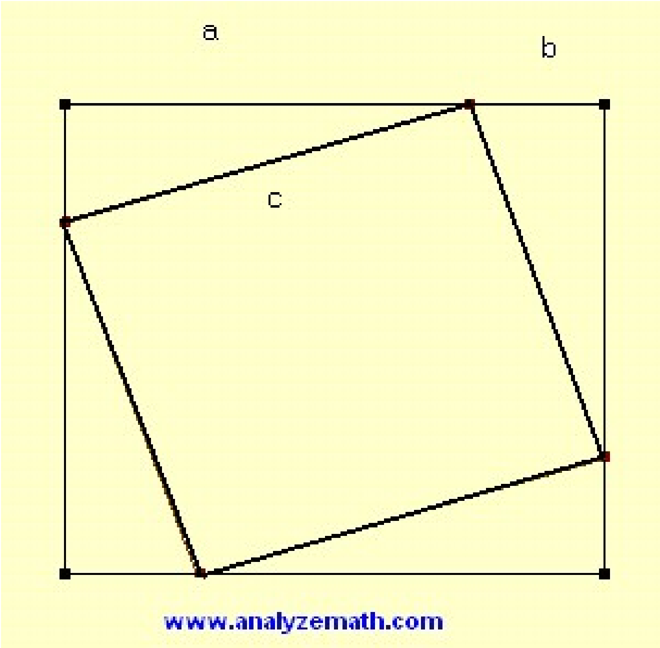
Prueba

Área del cuadrado grande = $(a+b)^2$

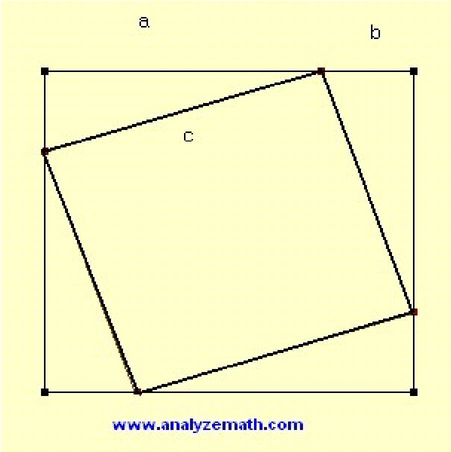
Cuadrado interior = c^2

Área de los cuatro triángulos = $4\left(\frac{1}{2}\right)$ab

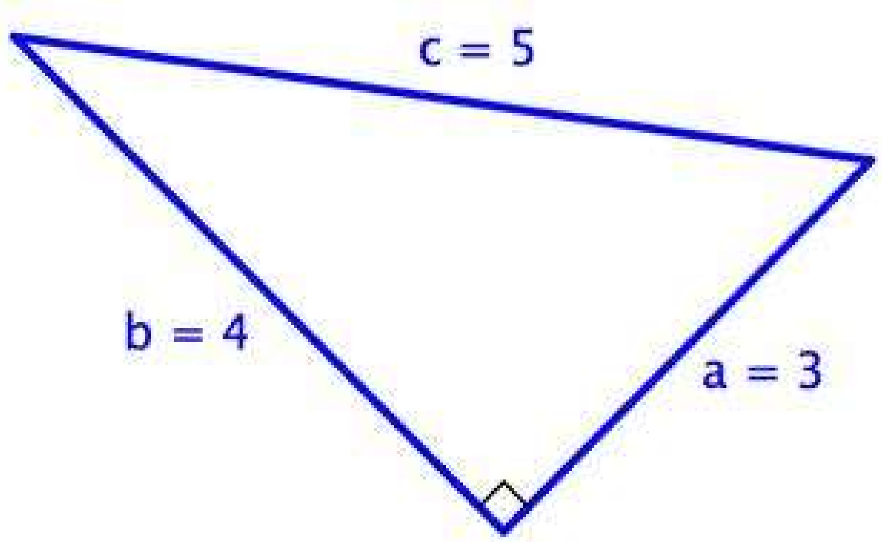
Es decir,



$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

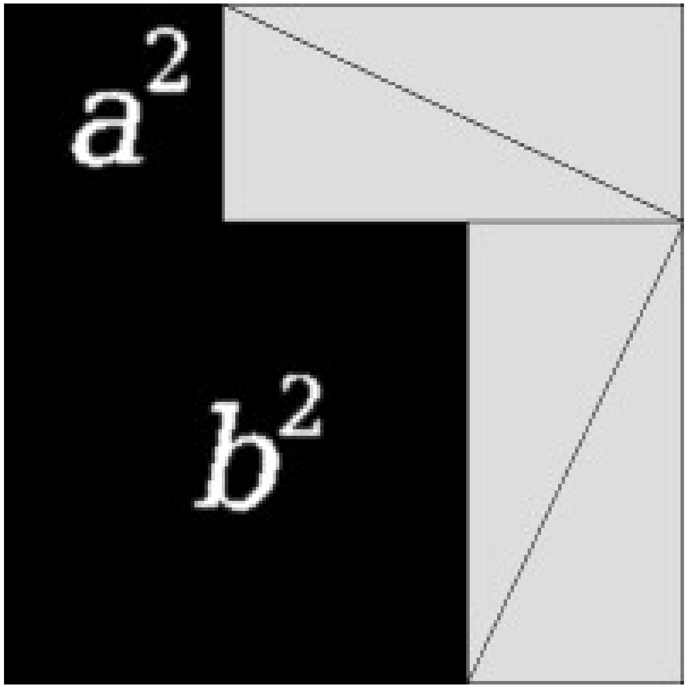


Ejemplo:



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(3)^2 + (4)^2 = (5)^2$$
$$9 + 16 = 25$$

Prueba visual

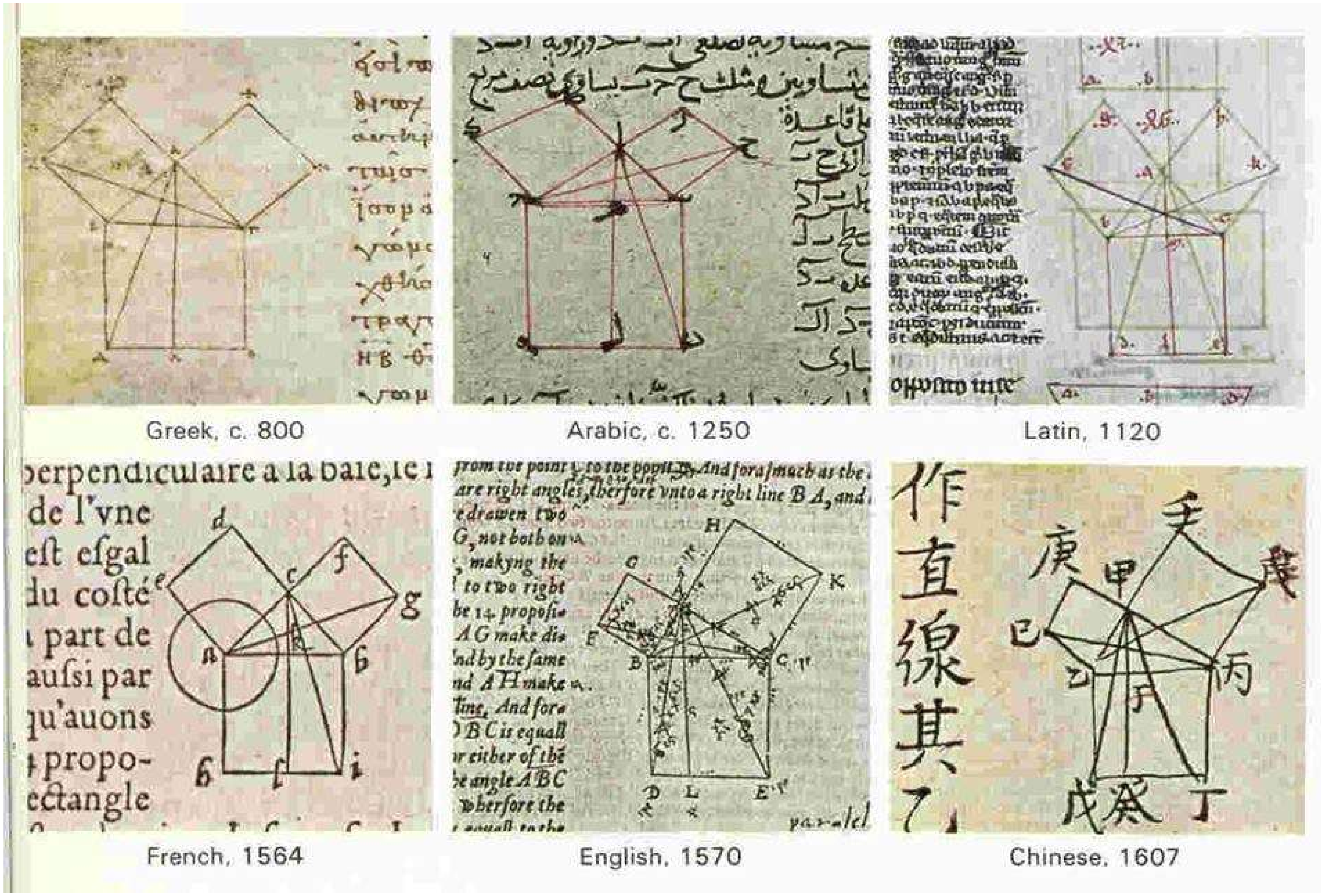


Ir a hoja de ejercicios problema 2, 3 y 4

- El Teorema fue descubierto en una tableta babilónica circa 1900-1600 A. C. Si Pitágoras (c.560-c.480 A.C.) u otra persona de su escuela fue el primero en descubrir su prueba no puede reclamarse con ningún grado de credibilidad.
- Los elementos de Euclides (c 300 A.C.) proporcionan la primera y más tarde referencia estándar en Geometría. De hecho, Euclides proporcionó dos pruebas muy diferentes: la Proposición I.47 (Primer Libro, Proposición 47) y VI.31.
- El teorema es reversible, lo que significa que su inverso también es verdadero. Lo contrario dice que un triángulo cuyos lados satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ tiene necesariamente un ángulo recto. Euclides fue el primero (I.48) en mencionar y probar este hecho.

https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

Distintas pruebas en la historia



Greek, c. 800 · Arabic, c. 1250 · Latin, 1120

French, 1564 · English, 1570 · Chinese, 1607

Una terna pitagórica consiste en una tupla de tres enteros positivos a, b, c que cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$.

Las 16 primeras ternas pitagóricas primitivas, con $c \leq 100$ son:

(3 , 4 , 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)	(8, 15, 17)
(9, 40, 41)	(11, 60, 61)	(12, 35, 37)	(13, 84, 85)
(16, 63, 65)	(20, 21, 29)	(28, 45, 53)	(33, 56, 65)
(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)	(65, 72, 97)

En matemáticas, una tupla es una lista ordenada de elementos. Una n-tupla es una secuencia (o lista ordenada) de n elementos, siendo n un número natural.

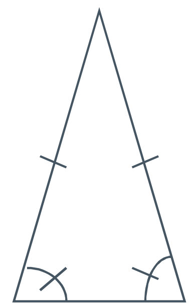
Clasificación de triángulos según medidas de sus lados

1. **Equilátero**: sus tres lados miden lo mismo.

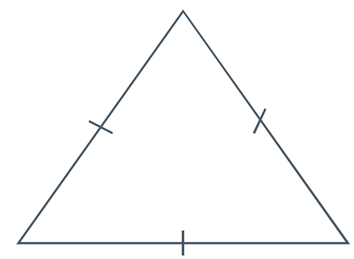
2. **Isósceles**: dos de sus lados miden lo mismo.

3. **Escalenos**: sus tres lados miden diferente

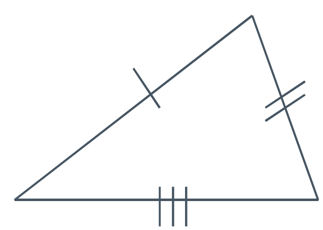
Isósceles (en griego significa: *de iguales piernas*)



Triángulo Isósceles: Tiene dos lados iguales, como consecuencia los ángulos opuestos a los lados iguales también son iguales



Triángulo Equilátero: Sus tres lados son iguales, como consecuencia sus tres ángulos también son iguales (equiángula), cada ángulo miden 60º cada uno.



Triángulo Escaleno: Sus tres lados miden distinto, como consecuencia, sus tres ángulos también miden distinto.

Resumen: Clasificación de Triángulos

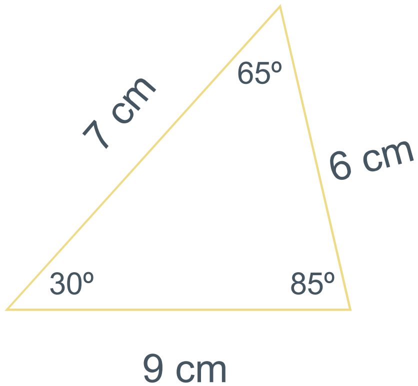
Los triángulos según la medida de sus lados pueden ser:

1) Isósceles.
2) Equilátero.
3) Escalenos.

Según sus ángulos internos los triángulos pueden ser:

1) Acutángulos (ángulos internos agudos).
2) Rectángulos (un ángulo recto).
3) Obtusángulos (un ángulo obtuso).

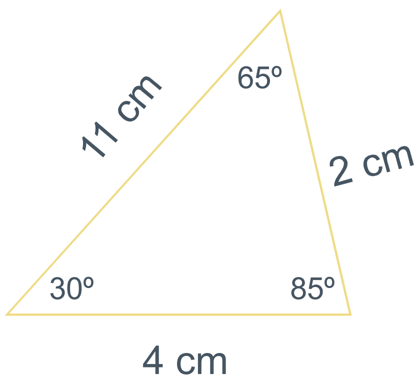
Ejemplo:



7 cm
6 cm
9 cm
65º
30º
85º

Triángulo
Posible
Imposible
Clasificación
¿Por qué?

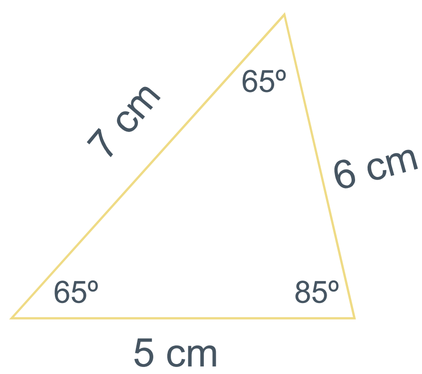
Ejemplo:

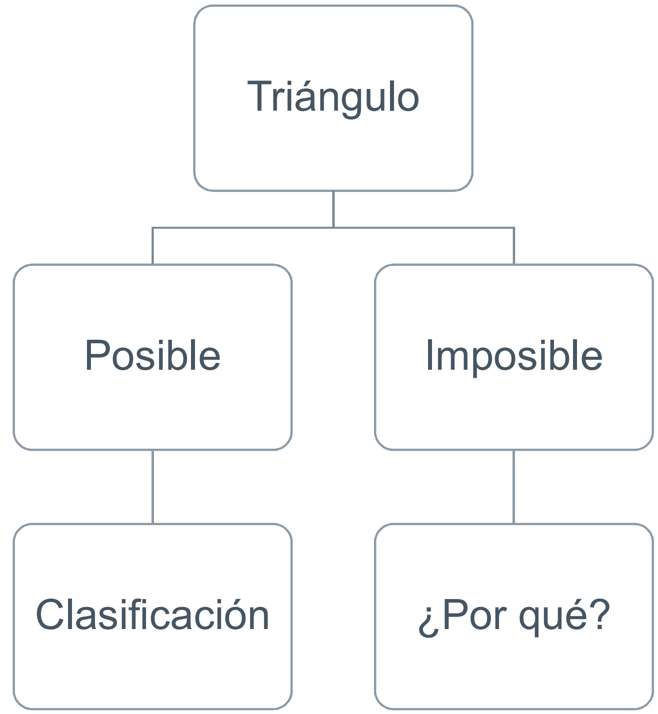


11 cm
65º
2 cm
30º
85º
4 cm

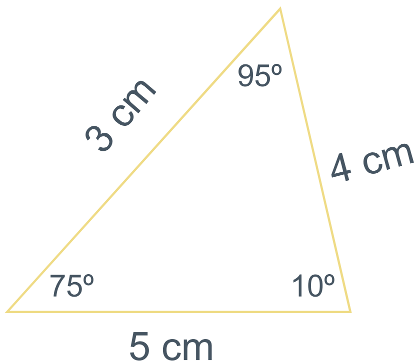
Triángulo
Posible
Imposible
Clasificación
¿Por qué?

Ejemplo:


7 cm
65º
6 cm
65º
85º
5 cm

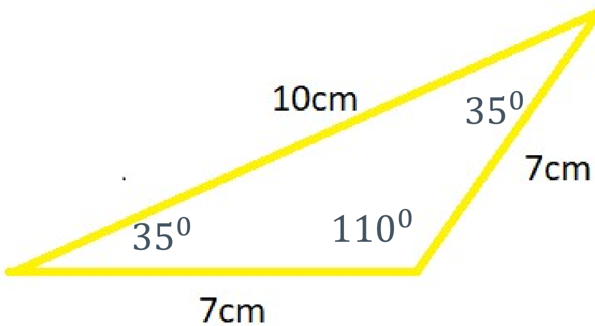

Triángulo
Posible
Imposible
Clasificación
¿Por qué?

Ejemplo:


3 cm
4 cm
5 cm
95º
75º
10º

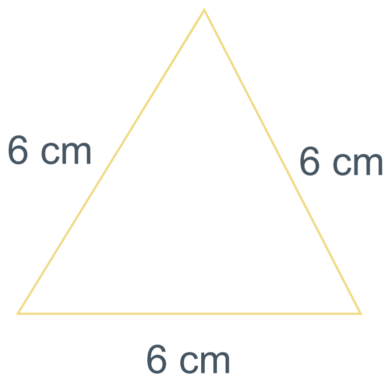

Triángulo
Posible
Imposible
Clasificación
¿Por qué?

Ejemplo:


10cm
35^0
7cm
35^0
110^0
7cm

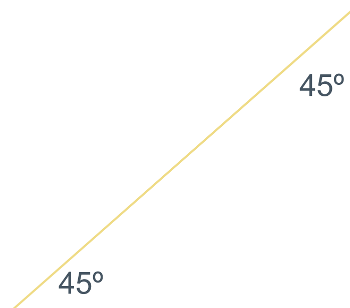

Triángulo
Posible
Imposible
Clasificación
¿Por qué?

Ejemplo:


6 cm
6 cm
6 cm

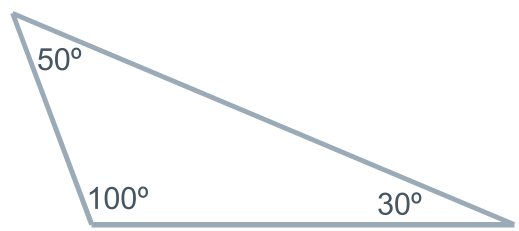

Triángulo
Posible
Imposible
Clasificación
¿Por qué?

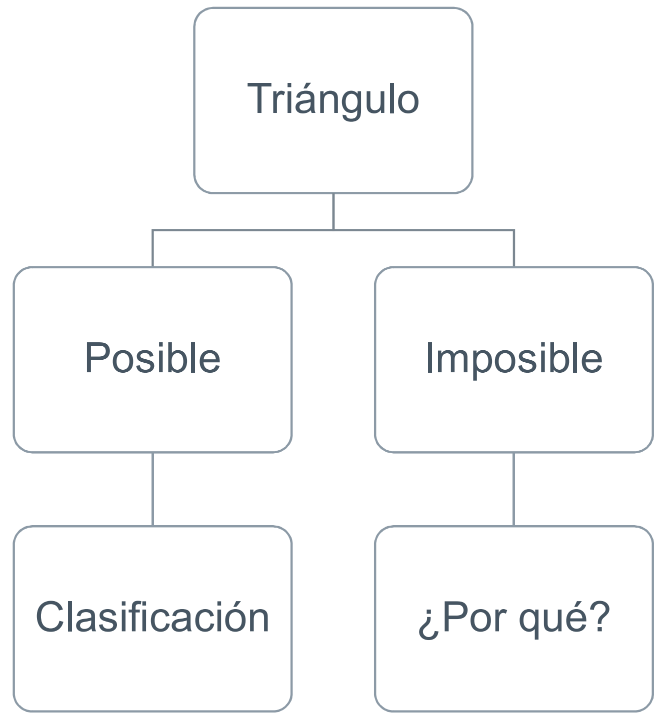
Ejemplo:


45º
45º


Triángulo
Posible
Imposible
Clasificación
¿Por qué?

Ejemplo:

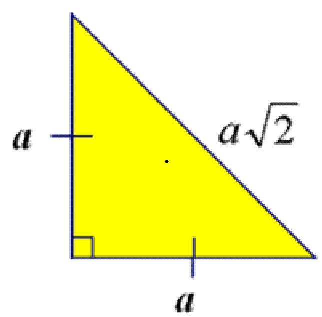

50º
100º
30º


Triángulo
Posible
Imposible
Clasificación
¿Por qué?

Triángulos Especiales

Teorema del triángulo rectángulo isósceles (45 – 45 – 90)

En los triángulos rectángulos isósceles, los catetos son de la misma medida (*a*) y su hipotenusa será la medida del cateto multiplicada por raíz cuadrada de 2

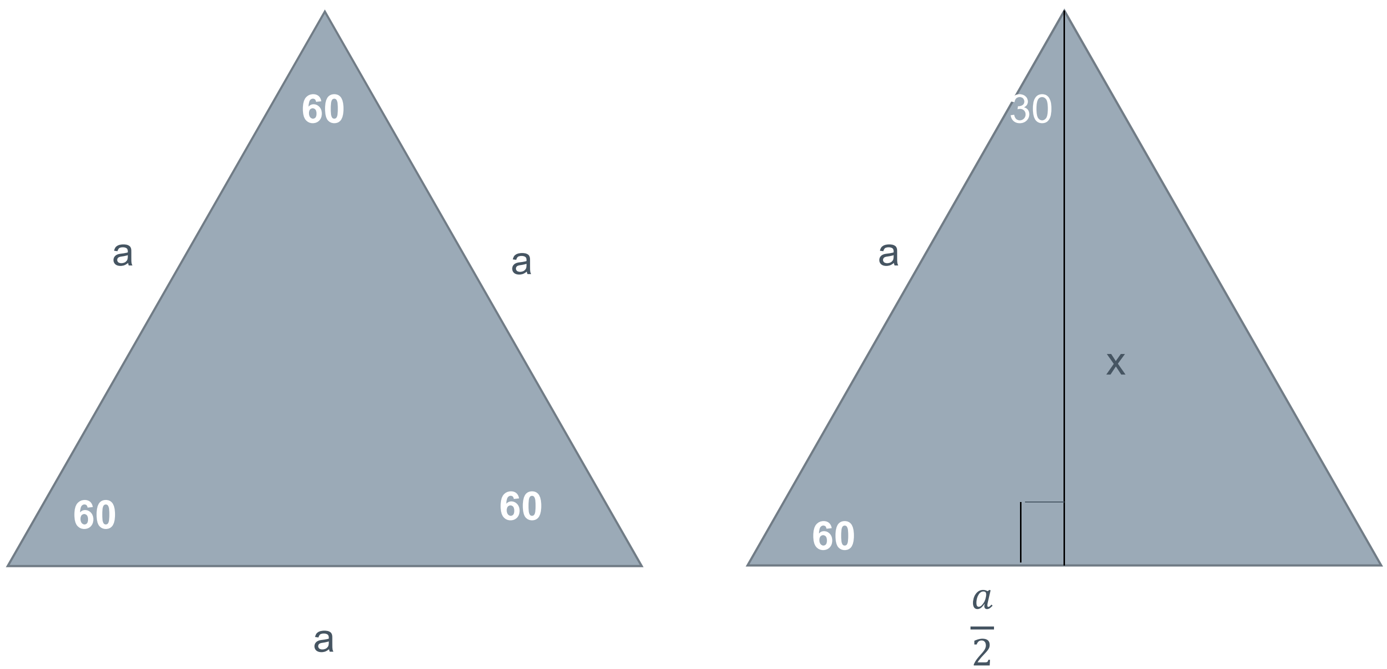


$$a^2 + a^2 = c^2$$
$$2a^2 = c^2$$
$$a\sqrt{2} = c$$

Teorema del triángulo rectángulo equilátero(60 – 60 – 90)

Si todos los lados del triángulo son iguales tenemos un triángulo equilátero.

Usando Pitágoras tenemos



Usando Pitágoras tenemos

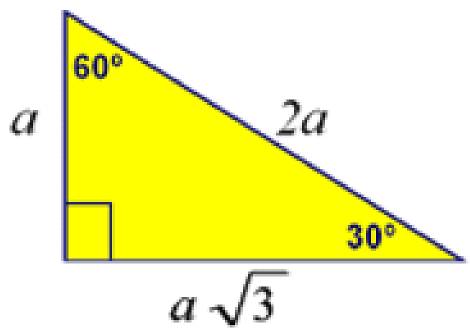
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2$$

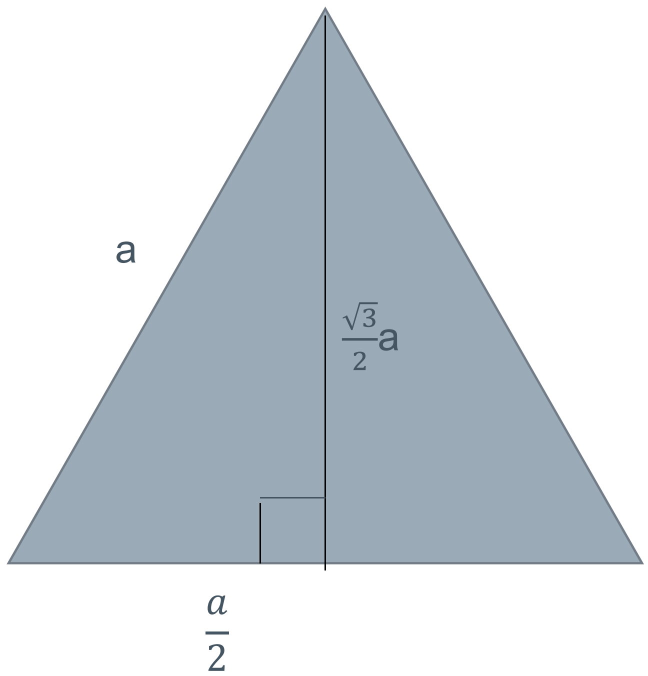
$$a^2 = \frac{a^2}{4} + x^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 = x^2$$

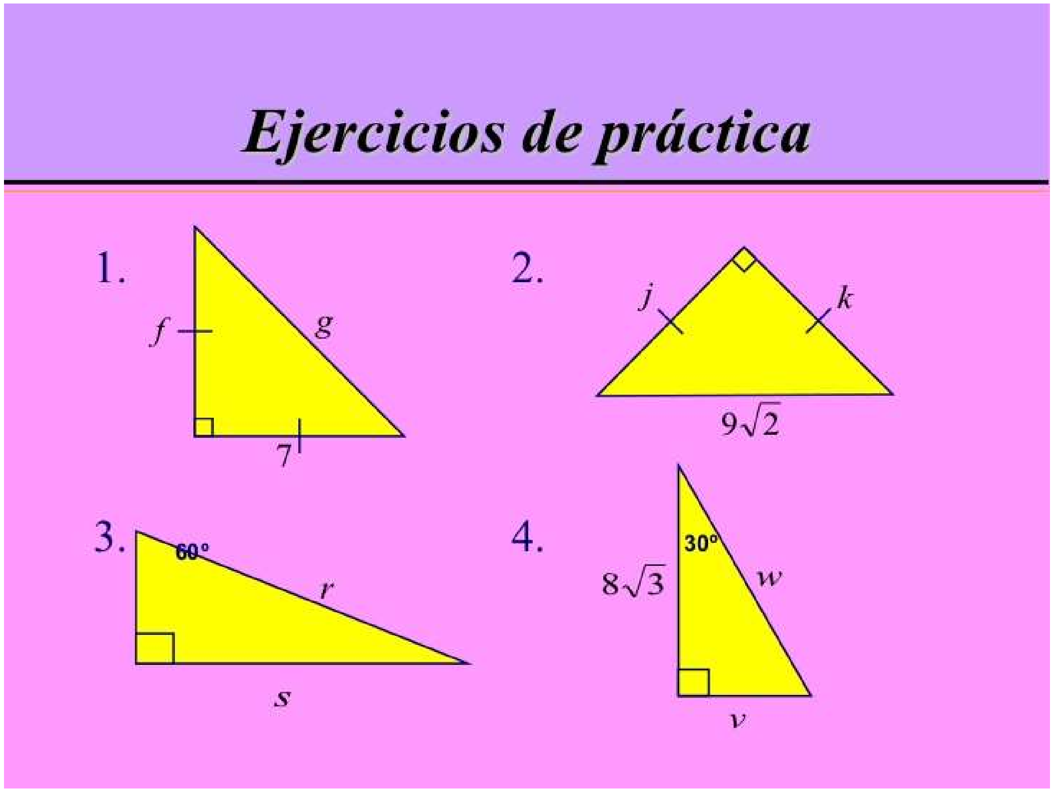
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Equivalente



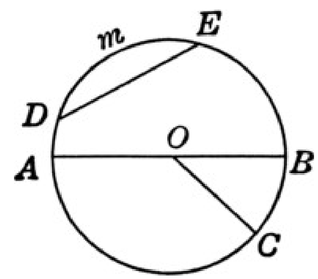


Ejemplo: Determine el valor de las siguientes variables



Definición: Un círculo es el conjunto de todos los puntos en el plano que se encuentran a una distancia fija, radio: *r* de un punto fijo, llamado centro.

Ecuación del Círculo con centro (0,0) y radio *r*:



$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación del Círculo con centro (*h,k*) y radio *r*:

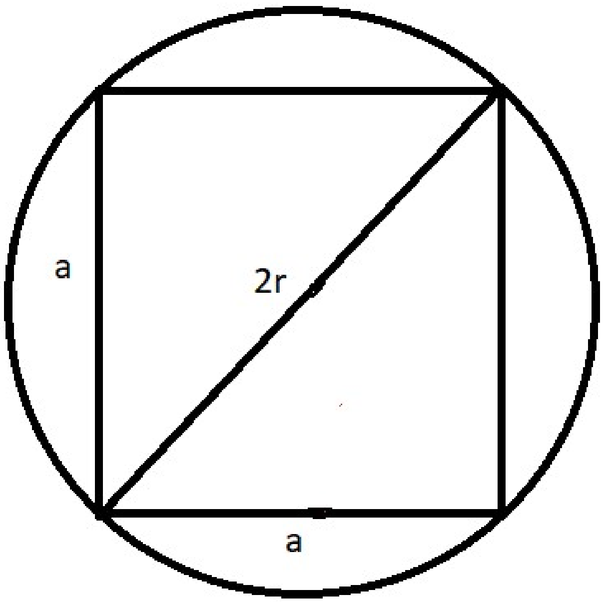
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ejemplos

Ej1) Determine la ecuación del círculo que tiene extremos del diámetro en los puntos

(2,1) y (4,3)

Ej2) Un círculo de radio R se inscribe dentro de un cuadrado, determine la razón del área del cuadrado al área del círculo.



$$A = \pi r^2$$

$$(2r)^2 = a^2 + a^2$$
$$4r^2 = 2a^2$$
$$a^2 = 2r^2$$
$$a = \sqrt{2}\,r$$

Área del cuadrado

A=$(\sqrt{2}\,r)(\sqrt{2}\,r) = 2r^2$

Determine la razón del área del cuadrado al área del círculo.

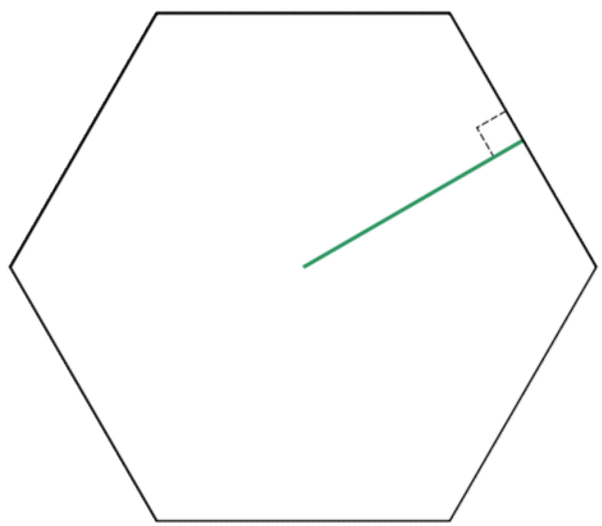
$$\frac{\acute{a}rea\ cuadrado}{\acute{a}rea\ circulo} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$$

Polígono regular

En geometría, se denomina polígono regular a un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí. Los polígonos regulares de tres y cuatro lados se llaman triángulo equilátero y cuadrado, respectivamente. Para polígonos de más lados, se añade el término regular (pentágono regular, hexágono regular, octágono regular, etc).

Apotema

La apotema de un polígono regular es la menor distancia entre el centro y cualquiera de sus lados. Es un segmento cuyos extremos son el centro de un polígono regular y el punto medio de cualquiera de sus lados, y es siempre perpendicular a dicho lado.



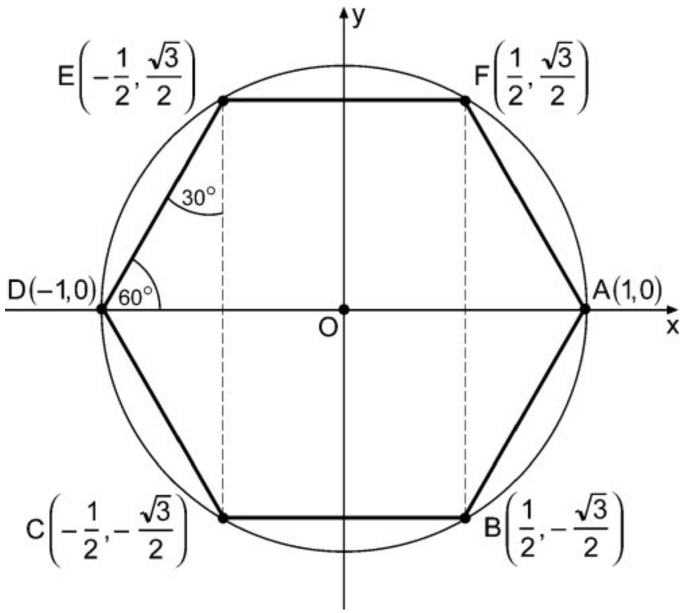
Área de un polígono regular

$$A = \frac{aP}{2}$$

Donde $a = \frac{s}{2\tan\frac{\pi}{n}}$

s= largo del lado

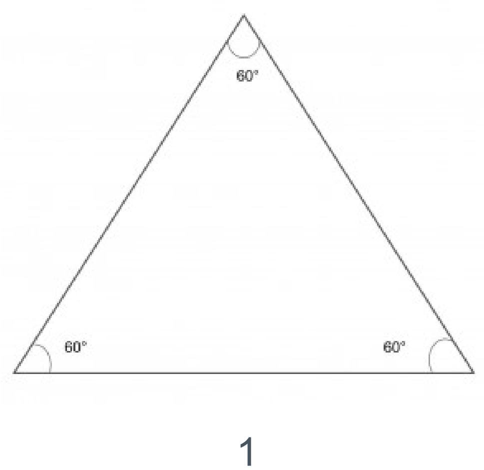
Calcular el área del siguiente hexágono usando la apotema

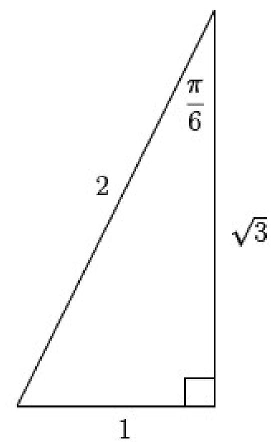


$$a = \frac{s}{2\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

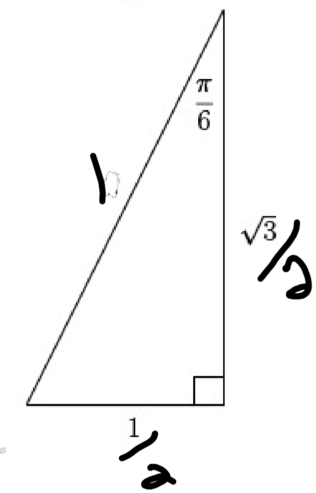
$$A = \frac{aP}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{6}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Calcular con área de triángulos





Si multiplicamos por ½ obtenemos



$$A_1 = \frac{1}{2}(1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

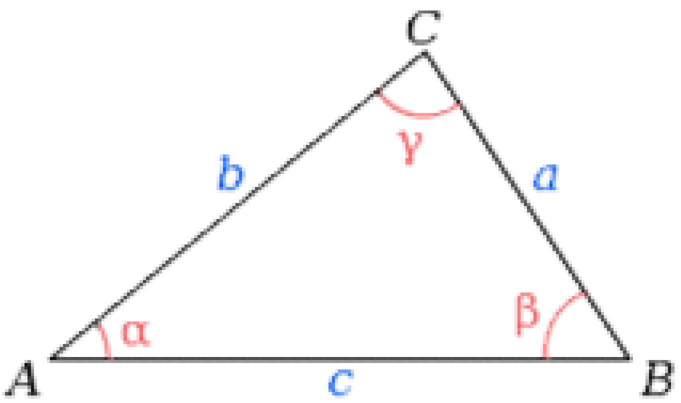
$$A_{total} = (6)\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Fómula de Herón

$$\acute{A}rea = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Semiperimetro

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

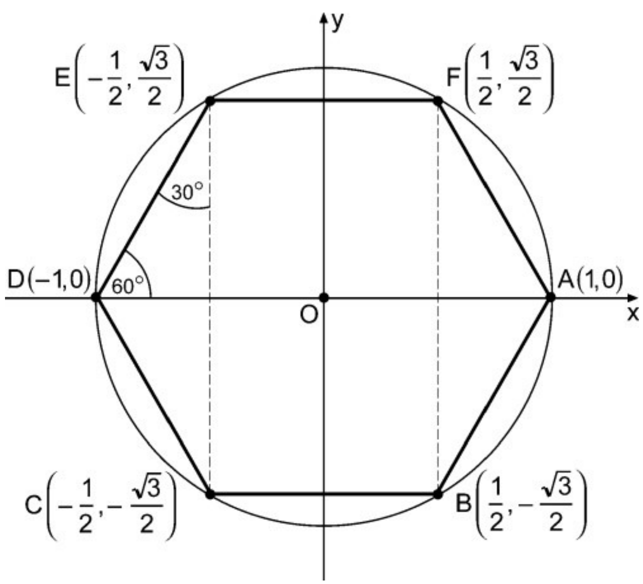


$$A_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2^4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{total} = \frac{\sqrt{3}}{4}(6) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Determinante de Gauss

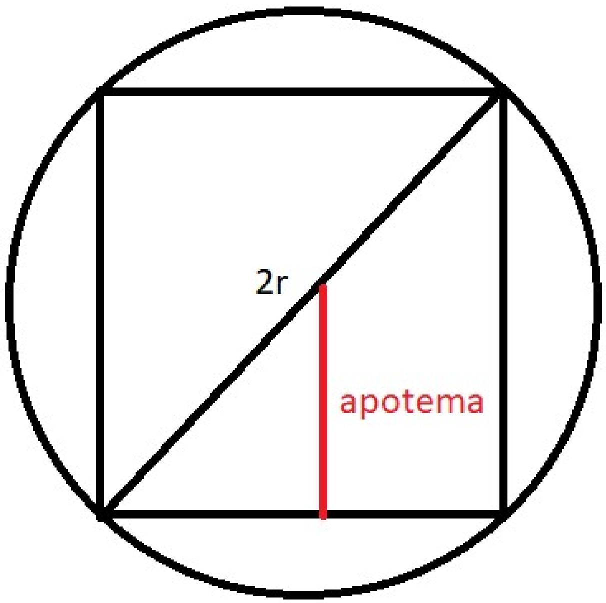


$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[6\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

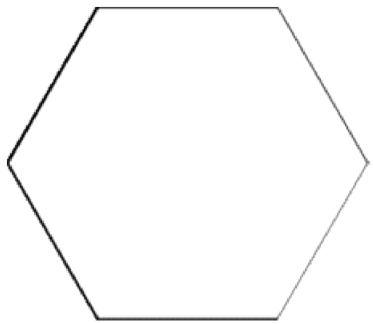
Regresemos al cuadrado inscrito en el círculo para verificar usando la apotema.



$$a = \frac{s}{2\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{\sqrt{2}r}{2\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

$$A = \frac{aP}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)\left(4\sqrt{2}r\right)\frac{1}{2} = 2r^2$$

Calcular el área del siguiente hexágono

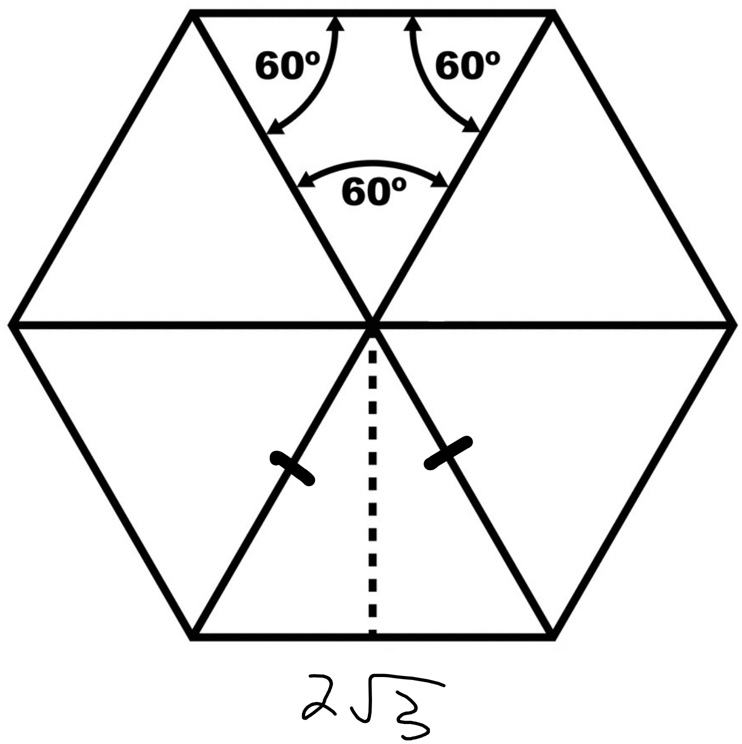


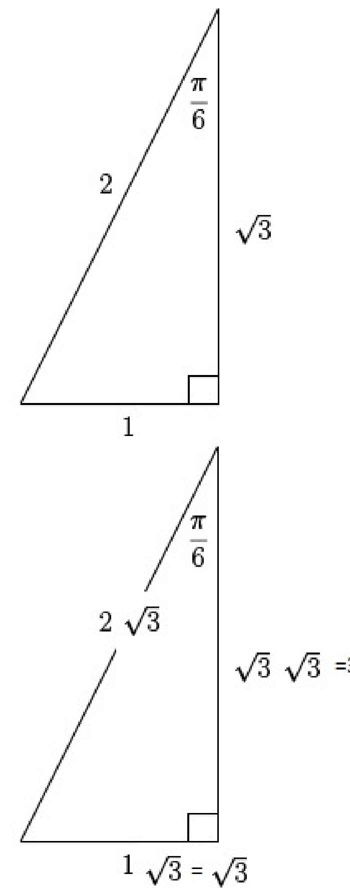
$2\sqrt{3}$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{2\ \tan\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

$$A = \frac{3(6)(2\sqrt{3})}{2} = 18\ \sqrt{3}$$

Ahora calcularemos el área con los triángulos

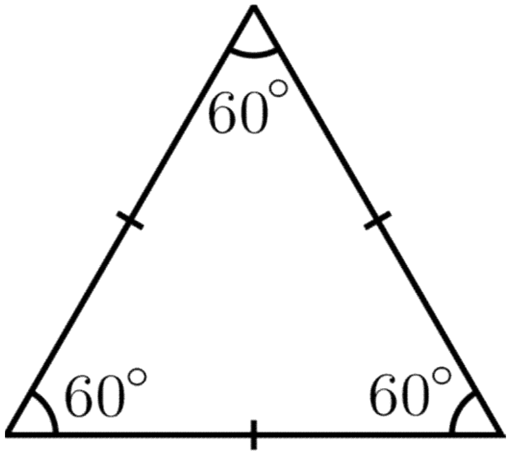




Área de un triángulo

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}\right)(3) = 3\sqrt{3}$$

$$A_{total} = 6\left(3\sqrt{3}\right) = 18\sqrt{3}$$



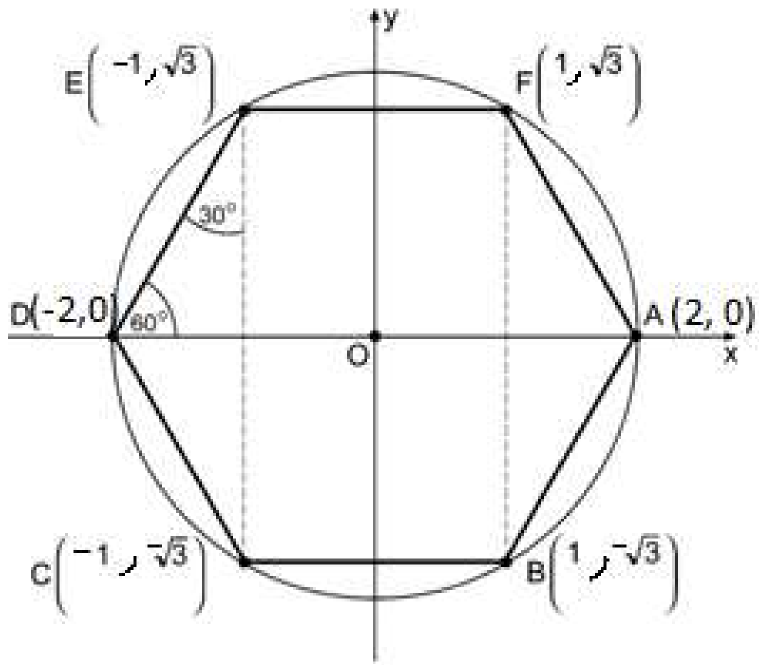
$$S = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$A = \sqrt{(3\sqrt{3})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}} = \sqrt{3 \cdot 3^2} = 3\sqrt{3}$$

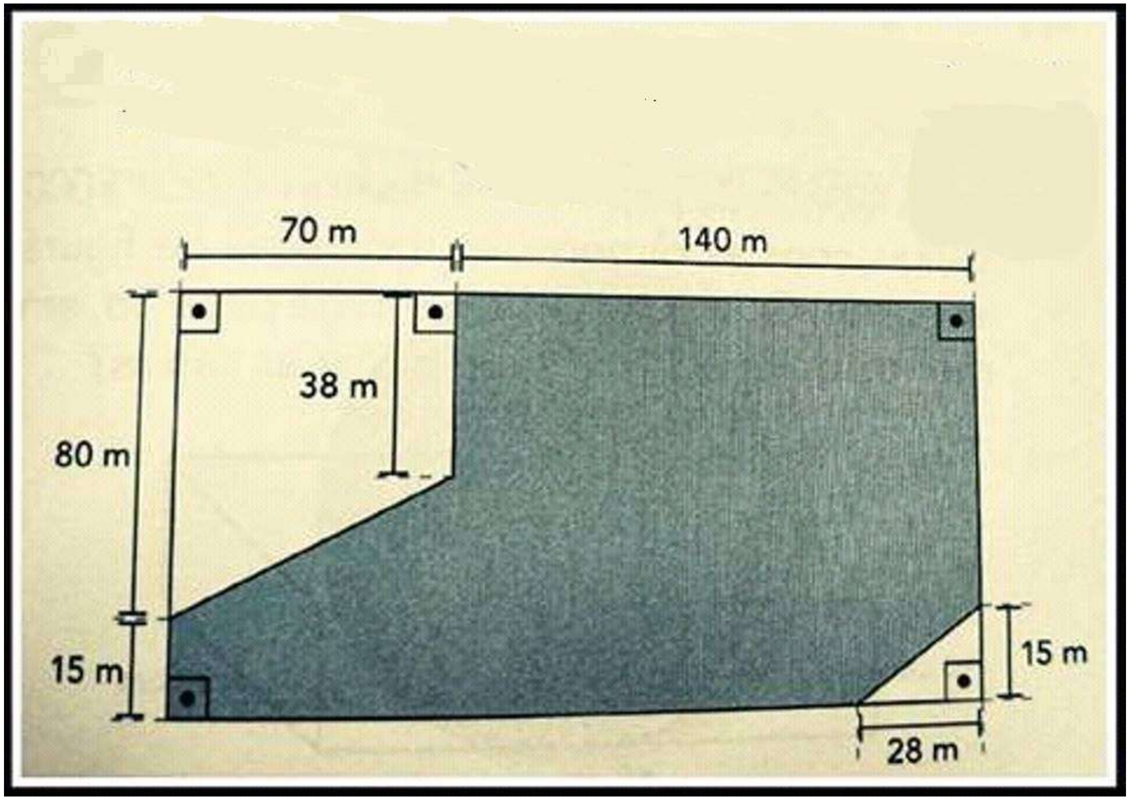
$$A_{total} = 6(3\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$$

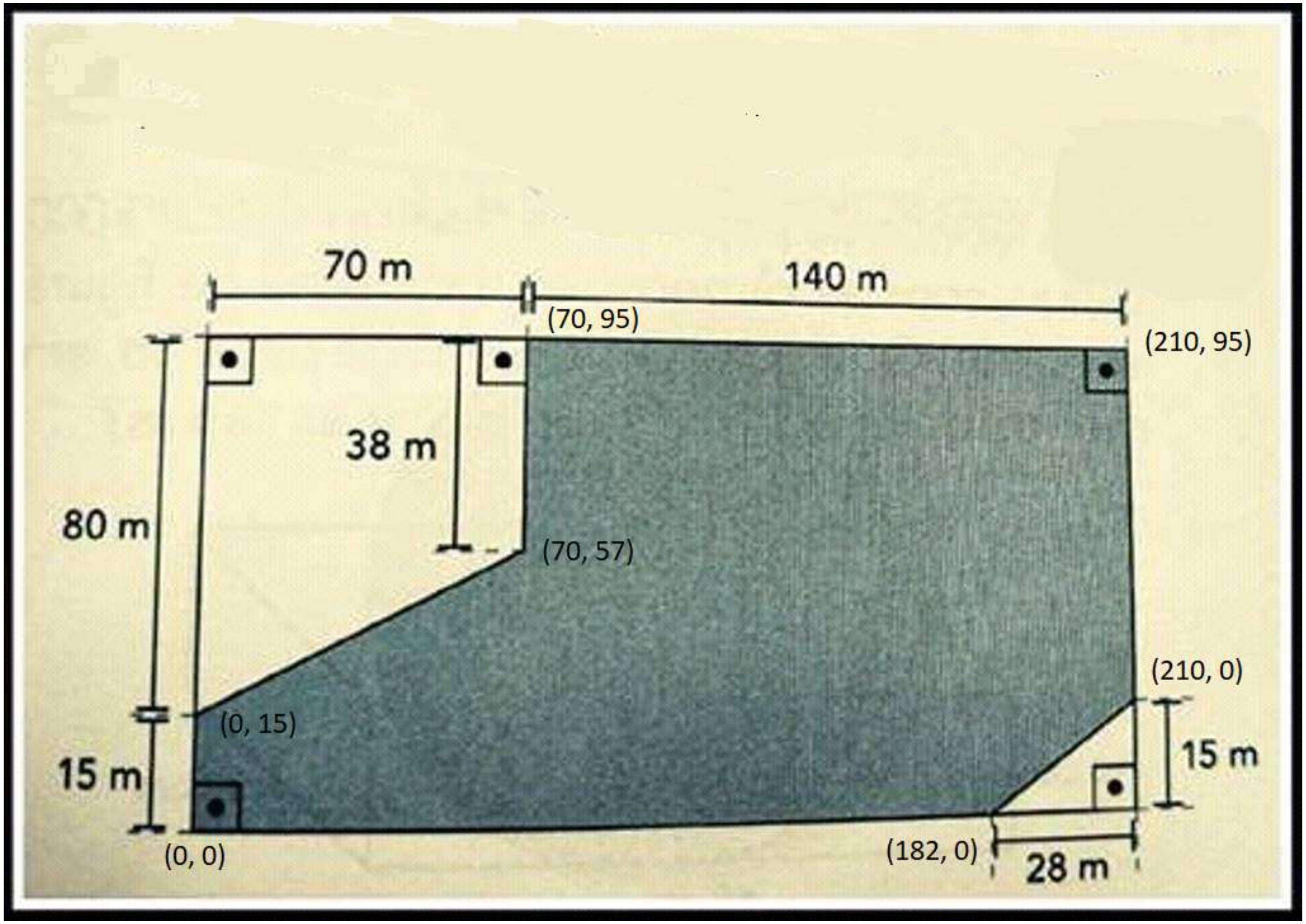
π

Calcular el área usando Apotema, Triángulos, Herón y determinante de Gauss.



Calcule el área de la siguiente figura




70 m
140 m
(70, 95)
(210, 95)
38 m
80 m
(70, 57)
(210, 0)
(0, 15)
15 m
15 m
(0, 0)
(182, 0)
28 m

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 182 & 0 \\ 210 & 0 \\ 210 & 15 \\ 210 & 95 \\ 70 & 95 \\ 70 & 15 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2{,}730 + 19{,}950 - 3{,}150 + 19{,}950 - 6{,}650 + 3{,}990 - 6{,}650 + 1{,}050) = \frac{1}{2}(31{,}220) = 15{,}610$$

PROF. JOSÉ NEVILLE DÍAZ
MATH.UPRAG.EDU/DIAZ.HTML

Blog

https://mateuprag.wordpress.com/

"La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando.“

Gottfried Wilhelm Leibniz

MUCHAS GRACIAS!!

"Incluso en los juegos de niños hay cosas para interesar al matemático más grande"

Gottfried Wilhelm Leibniz