4.3.2 Probabilidad Total y Regla de Bayes

Regla de la Probabilidad Total.

Sean $B_1,\ldots,B_n$ una *colección de eventos* que forman una *partición* del espacio muestral S esto es $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$ y $B_i \cap B_j = \phi$ *para* $i \neq j$. Sea A otro evento definido sobre S entonces:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$$

Notar que $A = A \cap S = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$. Por la propiedad distributiva, se tiene que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i$, donde la unión es disjunta. Aplicando el tercer axioma se obtiene $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$. Finalmente, se aplica la regla del producto a cada término de la suma y se obtiene la fórmula de probabilidad total.

Para una partición de S en dos eventos B y $\overline{B}$ se obtiene:

$$P(A) = P(B)P(A/B) + P(\overline{B})P(A/\overline{B})$$

Figura 4.13. Teorema de la Probabilidad Total

Ejemplo 4.17. El 70 % de los pacientes de un hospital son mujeres y el 20% de ellas son fumadoras. Por otro lado el 40 % de los pacientes hombres son fumadores. Se elige al azar un paciente del hospital. ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumador?

Solución:
Sean los eventos *F*: Que el paciente sea fumador, *H*: Que el paciente sea hombre y *M*: Que el paciente sea mujer. Claramente,

$$P(F) = P(M)P(F/M) + P(H)P(F/H)$$

Del enunciado del problema se tiene que $P(M) = .7$, $P(H) = .3$, $P(F/M) = .2$ y $P(F/H) = .4$, sustituyendo estos valores en la fórmula anterior se obtiene que $P(F) = .7 \times .2 + .3 \times .4 = .26$. En la Figura 4.14 se muestra el diagrama de árbol correspondiente al problema.

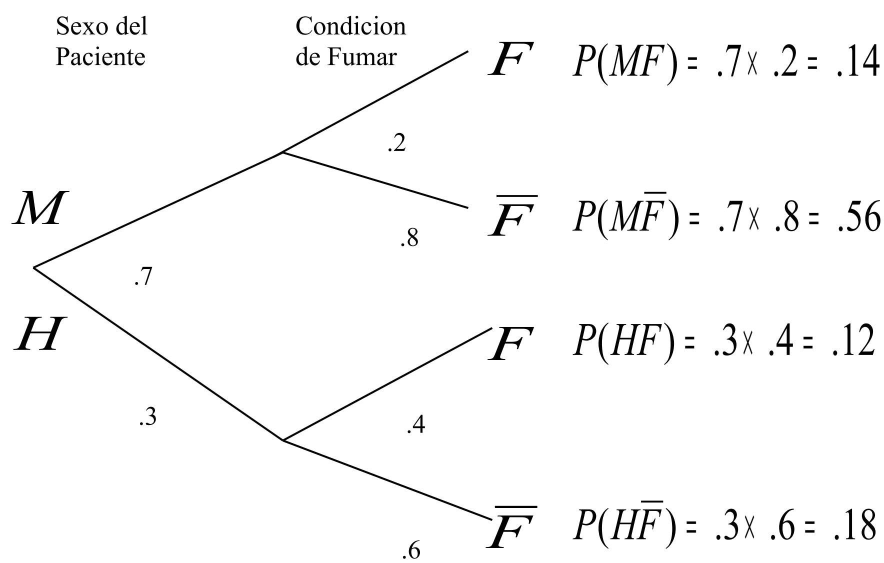

Figura 4.14. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.17

Ejemplo 4.18. En un hospital el 98% de los bebés nacen vivos. Por otro lado, 40% de todos los partos son por césarea y de ellos el 96% sobreviven al parto. Se elige al azar una mujer a la que no se va practicar césarea. ¿Cuál es la probabilidad de que el bebé viva?

Solución:
Sean los eventos ***V***: que el bebe nazca vivo, ***C***: que el parto sea por césarea. Del enunciado del problema $P(V) = .98$, $P(C) = .40$ y $P(V/C) = .96$. Se desea hallar $P(V/\overline{C})$.

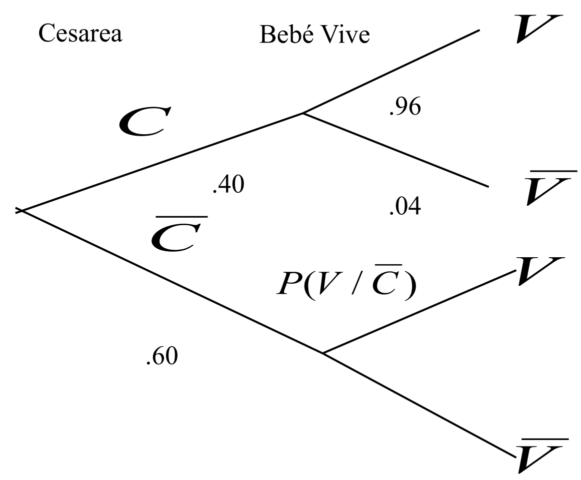

Figura 4.15. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.18.

Por la regla de la probabilidad total $P(V) = P(C)P(V/C) + P(\overline{C})P(V/\overline{C})$, de donde:

$.98 = (.40)(.96) + .60P(V/\overline{C})$, y $P(V/\overline{C}) = \dfrac{.596}{.60} = .993$. Un diagrama de árbol para el problema aparece en la Figura 4.15.

Ejemplo 4.19. Una empresa tiene 3 plantas: *A*, *B* y *C*. La planta A produce el 50% de la producción total, *B* produce el 30% y *C* el 20%. El 3% de la producción de *A* es defectuosa, mientras que el 2% de *B* y el 5% de *C* también lo son. Se elige al azar un artículo producido por la empresa:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo elegido sea defectuoso?
b) Si el artículo elegido resulta ser defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la planta *C*?

Solución:

a) Los eventos *A*, *B* y *C* forman una partición del espacio muestral *S* correspondiente a elegir un articulo de la fábrica. Luego, si *D* representa artículo defectuoso:

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$$

Sutituyendo los datos del problema se tiene que

$$P(D) = P(.5)P(.03) + P(.3)P(.02) + P(.2)P(.05) = .031$$

b) $P(C/D) = P(C \cap D)/P(D) = (.2)(.05)/.031 = .010/.031 = .3225$

El diagrama de árbol de la Figura 4.16 representa el problema.

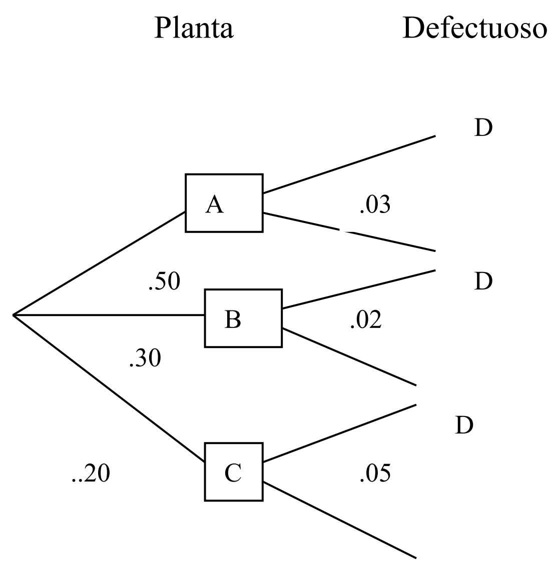

Figura 4.16. Diagrama de árbol para el problema 4.19

La Regla de Bayes

Bajo las mismas condiciones de la regla de probabilidad total, se cumple que:

$$P(B_j / A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Por definición de probabilidad condicional $P(B_j / A) = \dfrac{P(B_j \cap A)}{P(B)}$ y aplicando la regla del producto en el numerador y probabilidad total en el denominador se obtiene la regla de Bayes.

Ejemplo 4.20. Una prueba para diagnosticar cáncer lo detecta en el 95% de personas que efectivamente tienen la enfermedad y en el 1% de las personas que no tienen la enfermedad. Por estudios previos se ha determinado que sólo el .5% de las personas sometidas a la prueba tienen efectivamente cáncer. Si la prueba da un diagnóstico positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga realmente cáncer?

Solución:

Sean los eventos C: La persona tiene cáncer y D^+ : La persona da un diagnóstico positivo de cáncer. Hay que hallar $P(C/D^+) = P(C)P(D^+/C)/P(D^+)$, donde

$$P(D^+) = P(C)P(D^+/C) + P(\overline{C})P(D^+/\overline{C}).$$

Como $P(C) = .005$, $P(D^+/C) = .95$ y $P(D^+/\overline{C}) = .01$, se obtiene que

$$P(D^+) = (.005)(.95) + (.995)(.01) = .00475 + .00995 = .01470$$

Luego, P(C/D^+) = (.005)(.95)/.01470 = .00475/.01470 = .323.

El siguiente diagrama de árbol representa el problema.

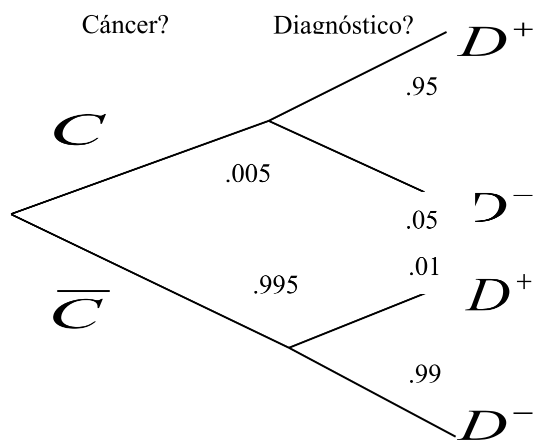

Figura 4.17. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.20

Ejemplo 4.21. Suponga que los chips de un circuito integrado son probados con cierto instrumento y la probabilidad de que se detecten los defectuosos es .99. Por otro lado hay una probabilidad de .95 de que un chip sea declarado como bueno si efectivamente lo es. Si el 1% de todos los chips son defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que un chip que es declarado como defectuoso sea en realidad bueno?

Solución:
Sean los eventos M: Que el chip sea declarado defectuoso por el instrumento, D: Que el chip sea realmente defectuoso y B: Que el chip sea realmente bueno. De los datos del problema se tiene que $P(M/D) = .99$ y $P(M/B) = 1 - .95 = .05$, además $P(D) = .01$. Lo que debemos calcular es $P(B/M) = P(B)P(M/B)/P(M)$. Pero, $P(M) = P(D)P(M/D) + P(B)P(M/B)$ = $(.01)(.99) + (.99)(.05) = .0099 + .0495 = .0594$, por lo tanto $P(B/M) = .0495/.0594 = .833$.

Ejemplo 4.22. Una urna I contiene 2 bolas rojas y 4 blancas y una urna II contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Se saca una bola de la urna I y se la coloca en la urna II, luego se saca una bola de ésta la cual resulta ser roja, ¿Cuál es la probabilidad de que la bola pasada de I a II haya sido blanca?

Solución:
Sean los eventos B_1: Que la bola extraida de la urna I sea blanca, R_1: Que la bola extraida de la urna I sea roja, B_2: Que la bola extraida de la urna II sea blanca, R_2: Que la bola extraida de la urna II sea roja. Hay que hallar $P(B_1/R_2) = P(B_1 \cap R_2)/P(R_2)$. Puesto que $P(B_1) = 1/3$, $P(R_1) = 2/3$, $P(R_2/B_1) = 3/6 = 1/2$ y $P(R_2/R_1) = 4/6 = 2/3$, se tiene que $P(R_2) = P(R_1)P(R_2/R_1) + P(R_1)P(R_2/R_1) = 22/36 = 11/18$, de donde sigue que $P(B_1/R_2) = (1/6)/(11/18) = 3/11 = .42$.

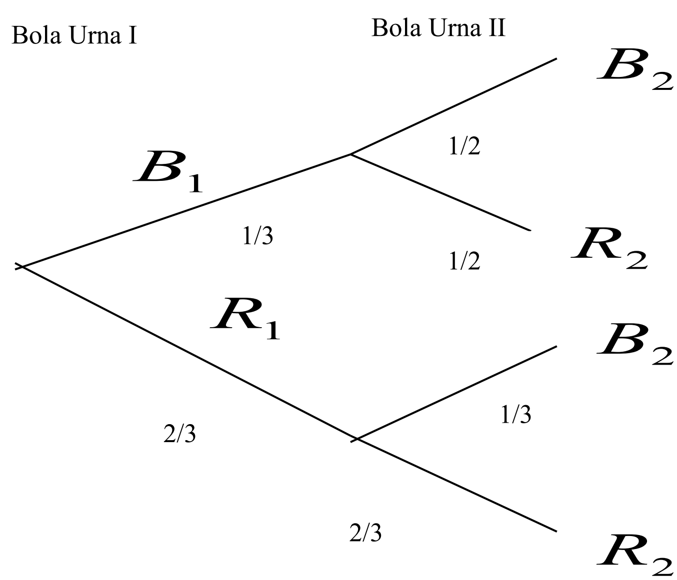

Figura 4.18. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.22.

EJERCICIOS

1. Un metereólogo afirma que la probabilidad de que llueva el sábado es 25%, la probabilidad de que llueva el domingo es 20% y la probabilidad de que llueva ambos dias es 15%. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva durante el fin de semana?

2. En una universidad el 60% de los estudiantes ni fuman ni beben. Además el 30% fuma y el 25% bebe. Se elige al azar un estudiante, ¿Cuál es la probabilidad:
   a) Que tenga al menos uno de los dos hábitos?
   b) Que tenga sólo uno de los hábitos?
   c) Que sea un bebedor y fumador?

3. Un grupo de 6 hombres y 6 mujeres es dividido al azar en dos grupos de tamaño 6. ¿Cuál es la probabilidad de que:
   a) Ambos grupos tengan el mismo número de hombres?
   b) Un grupo tenga dos mujeres y el otro 4?

4. Si 10 bolas son distribuidas al azar en 4 urnas. ¿Cuál es la probabilidad de que la cuarta urna contenga exactamente 3 bolas?

5. 60 niños de segundo grado son asignados al azar en dos clases de 30 cada uno. Cinco de ellos: Diana, Ana, Sofía, Michelle y Paula son amigas intimas:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas ellas sean asignadas a la misma clase?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de ellas sean asignadas a la misma clase?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que Diana esté en una clase y sus amigas en la otra?

6. Un catador de vinos afirma que puede distinguir entre 4 variedades de un vino Cabernet. ¿Cuál es la probabilidad de que el catador logre identificar correctamente las 4 variedades de vino si le dan a probar 4 vasos donde no aparecen marcadas las variedades del vino?

7. Una Urna A contiene 3 bolas rojas y dos bolas blancas y, una Urna B tiene 2 bolas rojas y 5 blancas. Se lanza una moneda legal y si sale cara se extrae una bola de la Urna A, en caso contrario la bola es sacada de B.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea roja?
   b) Si la bola extraída fue roja, ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda haya salido cara?

8. Se lanza un par de dados y la suma que aparece es 6, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dados salió 3?

9. Una pareja de esposos tiene dos hijos
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean niñas si la mayor lo es?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean niñas dado que una de ellas es niña?

10. En una ciudad el 1.5% de personas sufren de Daltonismo. Por otro lado, 55% de la población son mujeres y el .5% de ellas sufre de Daltonismo. Si se elige al azar una persona y se encuentra que sufre de Daltonismo; ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?

11. Una urna contiene 3 bolas rojas y dos blancas. Se extrae una bola, se observa su color y luego se

devuelve a la urna junto con otra bola del mismo color, luego se extrae una segunda bola:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraida sea blanca?

b) Si la segunda bola extraída fue blanca; ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

12. Una compañia de seguros clasifica a sus clientes como de alto, mediano y bajo riesgo, ellos reclaman el pago de un seguro con probabilidades .02, .01 y .0025 respectivamente. El 10% de los clientes son de alto riesgo, el 20% de mediano y el 70% de bajo riesgo. Si uno de los clientes reclama el pago de un seguro; ¿Cuál es la probabilidad de que sea uno de bajo riesgo?

13. Se tienen 3 tarjetas iguales excepto que una tiene ambos lados rojos, otra ambos lados negros, y la tercera un lado rojo y otro negro. Se elige al azar una tarjeta y se muestra uno de sus lados que resulta ser rojo; ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lado de la tarjeta sea también rojo?

14. Una caja tiene 3 monedas, una de ellas tiene dos caras, la otra dos cruces y la tercera cara por un lado y cruz por el otro. Se escoge una moneda al azar y se muestra uno de sus lados que resulta ser cara; ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lado de la moneda sea también cara?

15. a) Se colocan al azar 8 bolas en 8 urnas, cuál es la probabilidad de que quede solamente una vacia?

b) Si sólo hay disponibles 5 urnas para colocar las 8 bolas; ¿Cuál es la probabilidad de que la primera urna contenga exactamente dos bolas?

16. Una fábrica tiene tres turnos El 1% de los artículos producidos en el primer turno son defectuosos, 2% de los artículos del segundo turno son defectuosos y el 5% de los artículos del tercer turno también son defectuosos. Si en todos los turnos se produce la misma cantidad de artículos, ¿Qué porcentaje de los artículos producidos en un dia son defectuosos?

Si un artículo salió defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido en el tercer turno?

17. Una urna contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extraen 4 de estas bolas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda de ellas en orden ascendente de magnitud sea 4?

18. a) Se lanzan 6 dados, ¿Cuál es la probabilidad de que salgan cada uno de los números posibles?

b) Reponder la parte a) si se lanzan 7 dados.

19. El 60 por ciento de los estudiantes de una escuela no usan ni anillo ni cadena. Por otro lado el 20 por ciento usan anillos y el 30 por ciento usan cadenas. Se elige un estudiante al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté usando:

a) Anillo y cadena?

b) Solamente una de las dos prendas?

20. Un consejero académico hace una encuesta a 1000 graduandos de escuela superior para tratar de relacionar el promedio de graduación y su decisión acerca de lo que piensa estudiar en la universidad.

	Promedio Academico		
	2.0 -2.99	3.0-3.49	3.5-4.00

Decidido	50	100	150
Indeciso	350	250	100

Se elige al azar un graduando

a) Si resulta que él está indeciso, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga promedio de 3.5 ó más?

b) Si resulta que su promedio es menor que 3.0, ¿Cuál es la probabilidad de que haya decidido qué estudiar en la universidad?

c) Si resulta que él está decidido, ¿Cuál es la probabilidad de tenga promedio de 3.0 ó más?

d) Si su promedio es menor que 3.5, ¿Cuál es la probabilidad de que aún no se haya decidido?

21. En un lote de 50 neveras hay 6 dañadas y 44 buenas. Se eligen al azar dos neveras una por una y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Ambas neveras salgan dañadas?

b) Sólo una de las neveras salga dañada?

c) Por lo menos una de las neveras salga dañada?

d) La segunda salga dañada?

22. En un proceso de reclutamiento de personal se ha determinado que la probabilidad de que a un entrevistado se le haga una oferta de empleo es .3 independientemente de quién sea.. Juan, Pedro y Lilliam son entrevistados. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) A todos ellos se les haga oferta de empleo?

b) Al menos a uno de ellos se le haga oferta de empleo?