CAPÍTULO 4

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

La teoría de probabilidades tuvo su comienzo con los problemas de juegos al azar que fueron propuestos a Pascal y Fermat por Cavalier de Mere a mediados de 1600. Al inicio del siglo XVII, se publicó el libro de Jacobo Bernoulli titulado Arts *Conjectandi* (El Arte de Conjeturar) donde se trataba los experimentos obtenidos por repeticiones independientes de experimentos simples que tienen sólo dos resultados posibles. Más tarde, en ese mismo siglo, De Moivre introdujo la curva Normal. Durante el siglo XIX Laplace presentó la definición clásica de probabilidad en su libro *Theorie analytique des probabilities,* lamentablemente esta definición no es muy precisa y tiene limitaciones. Para esa misma época, los estudios de Gauss acerca de los Mínimos Cuadrados contribuyeron a dar más importancia a la curva Normal.

Sin embargo las probabilidades no fueron consideradas como una parte de las matemáticas hasta que en 1933 apareció la definición axiomática en el libro *Foundations of the theory of probability* escrito por Kolmogorov. Otros matemáticos rusos como Liapunov y Kinthchine también contribuyeron en esta etapa.

En la sección 1 de este capítulo primero definimos lo que es un Experimento Aleatorio y luego Espacios Muestrales y Eventos. En la sección 2, se considera las diferentes definiciones de Probabilidad comenzando con la definición axiomática seguida de la definición clásica, la frecuencial y la subjetiva. La sección 3 trata de Probabilidad Condicional e incluye también la regla de Probabilidad Total y la Regla de Bayes. La sección 4 de este capítulo es acerca de la Independencia de Eventos. En la última sección nos ocupamos del Cálculo de Probabilidades usando técnicas de Análisis Combinatorio.

4.1 Espacio Muestral y Eventos

4.1.1 Experimentos Aleatorios y Espacios Muestrales

Un **experimento** es una observación de un fenómeno que ocurre en la naturaleza. Hay dos tipos de experimentos:

Experimentos Determinísticos: Son aquellos en donde no hay incertidumbre acerca del resultado que ocurrirá cuando éstos son repetidos varias veces. Por ejemplo, Medir el área de un salón de clase. Medir la estatura de una persona adulta. En ambos casos una vez que se conoce el resultado del experimento en una repetición, entonces se sabe con certeza lo que ocurrirá en la siguiente repetición.

Experimentos Aleatorios: Son aquellos en donde no se puede anticipar el resultado que ocurrirá, pero si se tiene una completa idea acerca de todos los resultados posibles del experimento cuando éste es ejecutado. Además, asumiendo que el experimento se puede repetir muchas veces bajo las mismas condiciones se pueden tratar de construir un modelo que represente el comportamiento del experimento. A continuación algunos ejemplos:

Exp 1: Lanzar un dado y anotar el número que aparece en la cara superior.
Exp 2: Lanzar un par de monedas *y* anotar el resultado que aparece en cada una de ellas.
Exp 3: Un vendedor de la Enciclopedia Británica visita tres casas ofreciendo la colección y se anota V si vende o N si no vende en cada casa.
Exp 4: Se anota el número de boletos de lotería que hay que comprar hasta ganarse el premio mayor.
Exp 5: Se anota el tiempo que hay que esperar para ser atendidos en un Banco.

Espacio Muestral: Es el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio. Representaremos el espacio muestral por S y cada elemento de él es llamado un punto muestral. A continuación daremos los espacios muestrales de cada uno de los experimentos anteriores.

$$S_3 = \{VVV, VVN, VNV, NVV, VNN, NNV, NVN, NNN\}$$

Los espacios muestrales cuyos elementos resultan de hacer conteos son llamados **espacios muestrales discretos** y por lo general son subconjuntos de los números enteros. Algunos de estos espacios muestrales tienen un número finito de elementos y otros no.

De los espacios muestrales mencionados anteriormente S_1, S_2 y S_3 son espacios muestrales discretos finitos, en tanto que S_4 es un espacio muestral discreto infinito.

Los espacios muestrales cuyos elementos resultan de hacer mediciones son llamados **espacios muestrales continuos** y por lo general son intervalos en la recta Real. S_5 es un espacio muestral continuo.

4.1.2. Eventos

Un **Evento** es un resultado particular de un experimento aleatorio. En términos de conjuntos, un evento es un subconjunto del espacio muestral. Por lo general se le representa por las primeras letras del alfabeto. A continuación daremos ejemplos de eventos correspondientes a los experimentos aleatorios definidos anteriormente.

A: Que salga un número par al lanzar un dado.

$$A = \{2,4,6\}$$

B: Que salga por lo menos una cruz.

C: Que el vendedor de enciclopedias venda a lo más una de ellas.

$$C = \{VVV, VVN, VNV, NVV, VNN, NNV, NVN, NNN\}$$

D: Que se gane el premio mayor con menos de 9 boletos comprados.

E: Que haya que esperar más de 10 minutos para ser atendidos.

Evento Nulo: Es aquél que no tiene elementos. Se representa por ϕ.

El espacio muestral también puede ser considerado como un evento y es llamado el **Evento Seguro.**

En lo que estaremos interesados es en calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos, y para esto lo más importante es determinar el número de elementos que hay en el evento más que describir todos los elementos del mismo. En la Sección 5 veremos el uso de técnicas de análisis combinatorio para determinar el número de elementos de un espacio muestral y de eventos.

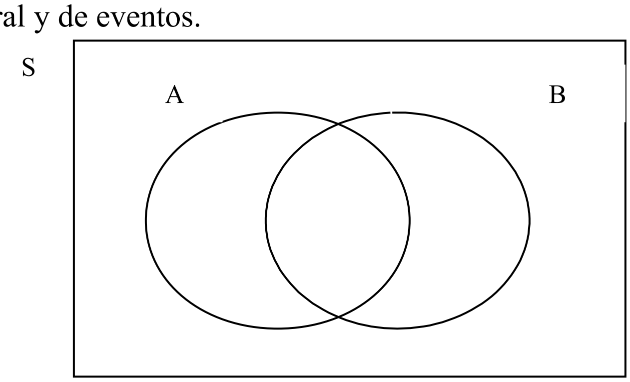


Figura 4.1: Diagrama de Venn de $A \cup B$

4.1.3. Relaciones entre eventos

Unión de eventos: Dados dos eventos A y B de un mismo espacio muestral su unión se representa por $A \cup B$ y es el evento que contiene los elementos que están en A o en B, o en ambos. El evento $A \cup B$ ocurre si al menos uno de los dos eventos ocurre. Dada una colección $A_1, \ldots, A_n$ de eventos, su unión denotada por $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ocurre si al menos uno de los $A_i, (1 \leq i \leq n)$ ocurre. En la Figura 4.1 está representada la unión de dos eventos usando el Diagrama de Venn.

Intersección de eventos: Dados dos eventos A y B de un mismo espacio muestral su intersección se representa por $A \cap B$ y es el evento que contiene los elementos que están en A y B al mismo tiempo. El evento $A \cap B$ ocurre cuando los eventos ocurren simultáneamente.

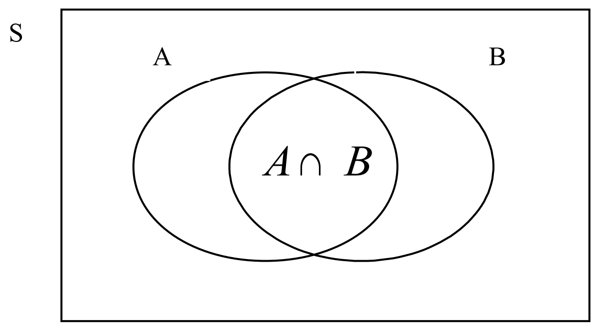


Figura 4.2: Diagrama de Venn de $A \cap B$

Algunas veces en este texto también denotaremos la intersección de los eventos A y B por AB o por A **y** B.
Si $A \cap B = \phi$ entonces se dice que A **y** B son **Mutuamente excluyentes** o **disjuntos.**
Dada una colección $A_1, \ldots, A_n$ de eventos, su intersección denotada por $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ocurre si todos los eventos $A_i, (1 \leq i \leq n)$ ocurren a la vez.

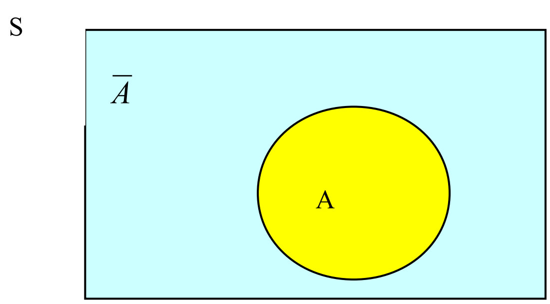


Figura 4.3: Diagrama del complemento de A

Evento Complemento: El complemento de un evento A se representa por $\overline{A}$ y es el evento que contiene todos los elementos que no están en A. El evento $\overline{A}$ ocurre si A no ocurre.

Propiedades de relaciones entre eventos

Sean A, B y C elementos de un mismo espacio muestral S entonces, las siguientes propiedades son ciertas.

1. **Propiedad Conmutativa**

2. **Propiedad Asociativa**

3. **Propiedad Distributiva**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. **Leyes de De Morgan**

a)

b)

Todas estas propiedades se pueden aplicar a más de dos eventos.

La parte a) de la ley de De Morgan significa que lo opuesto a que al menos uno de los eventos A y B ocurra es que ninguno de los dos ocurra.

La parte b) significa que ambos eventos no ocurren simultáneamente si al menos uno de ellos no ocurre.

Las generalizaciones de las leyes de De Morgan para una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$, son las siguientes:

a') $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

b') $$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

Es decir, lo opuesto a que al menos un evento ocurra es que ninguno ocurra, y lo opuesto a que todos los eventos ocurran simultáneamente es que al menos uno de ellos no ocurra.

4.2 Métodos de asignar Probabilidades

4.2.1 Método Axiomático

La Probabilidad es considerada como una función de valor real $P(\cdot)$ definida sobre una colección de eventos de un espacio muestral S que satisface los siguientes axiomas:

1. $P(S) = 1$

2. Si A es un evento de S entonces $P(A) \geq 0$.

3. Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots.$, es una colección de eventos disjuntos (por pares) entonces

. Esta es llamada el axioma de aditividad contable.

Asumiendo que se sigue del axioma 3 que

, ésta es llamada la propiedad de aditividad finita.

Propiedad 1 $P(\phi) = 0$

Propiedad 2

Propiedad 3. Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

Considerando $B = S$, se concluye de la propiedad 3 que $P(A) \leq 1$ para cualquier evento A de S.

Propiedad 4. Regla Aditiva de la Probabilidad

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

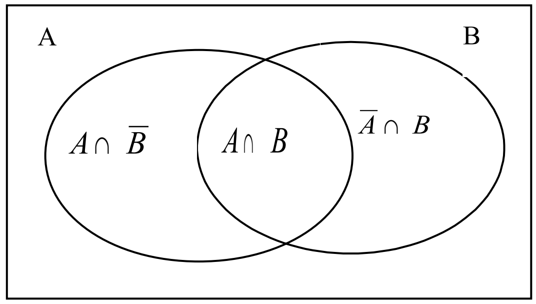


Figura 4.4: Diagrama de Venn de las regiones de A$\cup$ B.

Viendo la Figura 4.4, es claro que y que donde las uniones del lado derecho son disjuntas (ver Figura). Luego, por el Axioma 3 se tiene que $P(A\cup B) = P(A) + P(\overline{A}\cap B)$ y $P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$. Restando ambas igualdades se obtiene que $P(A\cup B) - P(B) = P(A) - P(A\cap B)$ de donde se obtiene la regla aditiva.

Las relaciones ente las probabilidades de dos eventos *A* y *B* también pueden resumirse en la siguiente tabla de doble entrada:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Ejemplo 4.1. Juan y Luis están solicitando ser admitidos en una univeridad. La probabilidad de que Juan sea admitido es 0.7 y la probabilidad de que Luis sea admitido es 0.6. La probabilidad de que ambos sean admitidos es .45.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que solamente uno de ellos sea admitido?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea admitido?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos sea admitido?

Solución:

Aún cuando podemos aplicar las propiedades anteriores, el problema puede ser resuelto de dos maneras:

i) Usando un diagrama de Venn:

Primero se determina la probabilidad de ocurrencia de cada región, empezando por la interseción, como se muestra en la Figura 4.5.

Sean los eventos ***J*:** Que Juan sea admitido y ***L***: Que Luis sea admitido. Luego,

a) La probabilidad de que sólo uno de ellos sea admitido es $P(J \cap \bar{L}) + P(\bar{J} \cap L) = .25 + .15 = .40$

b) La probabilidad de que al menos uno de ellos sea admitido es

c) La probabilidad de que ninguno de ellos sea admitido es

ii) Usando una tabla de clasificación cruzada:

En este caso se llenan las celdas de una tabla de doble entrada, cada entrada de la tabla representa la probabilidad de ocurrencia de un evento. En este caso sería

	J	$\bar{J}$	
L	.45	.15	.6
$\bar{L}$	.25	.15	.4
	.7	.3	1.0

Las celdas que aparecen en claro fueron datos del problema, las que aparecen en gris se llenaron aplicando propiedades.

S

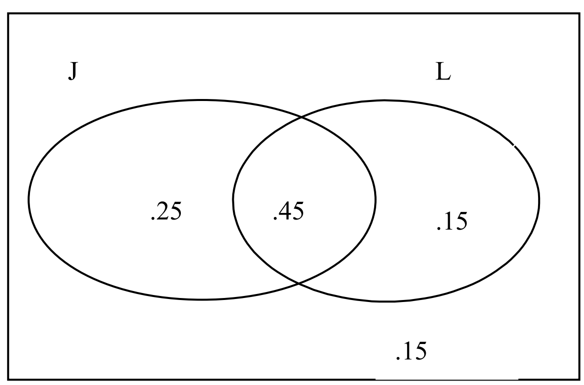


Figura 4.5: Diagrama de Venn para el Ejemplo 4.1.

Ejemplo 4.2. Una empresa tiene dos maneras *A* **y** *B* de presentar un nuevo producto al mercado. Si presenta el producto de la manera *A* la probabilidad de que el producto sea exitoso es 0.44 y si lo presenta de la manera *B* la probabilidad de éxito se reduce a 0.29. La probabilidad de que el producto fracase con ambas maneras de presentación es 0.37. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea exitoso con ambas formas de presentación?

Solución:

Sean los eventos ***A***: Que el producto sea exitoso con la manera *A* y ***B***: que el producto sea exitoso con la manera *B*. Tenemos que hallar $P(A\cap B)$. Por la ley de De Morgan se obtiene que $P(\overline{A\cup B}) = P(\overline{A}\cap \overline{B}) = .37$. Así, $P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A\cup B}) = 1 - .37 = .63$. Luego aplicando la regla aditiva se obtiene que la probabilidad de que el producto sea exitoso con ambas maneras de presentación es:

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = .44 + .29 - .63 = .10$$

La Figura 4.6 muestra el diagrama de Venn correspondiente.
Usando una tabla de doble entrada se tendría lo siguiente:

	A	$\overline{A}$	
B	.10	.19	.29
$\overline{B}$	.34	.37	.71
	.44	.56	1.0

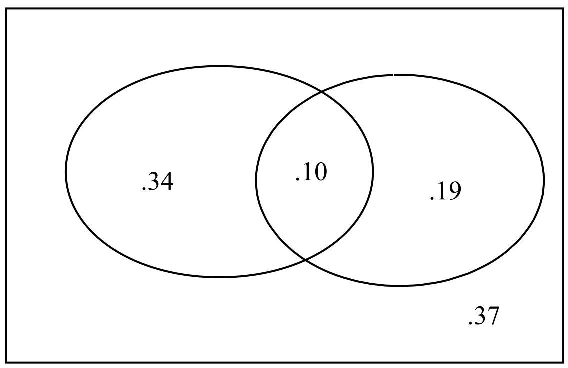


Figura 4.6: Diagrama de Venn para el Ejemplo 4.2.

La propiedad 4 se puede aplicar a más de dos eventos. Asi para tres eventos *A*, *B* y *C* se tiene que:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

Ejemplo 4.3. Rosa, Carmen y Alberto estudian juntos para un examen. La probabilidad de que Rosa pase es 0.65, de que Carmen pase es 0.75 y de que Alberto pase es 0.50. La probabilidad de que Rosa y Carmen pasen es 0.55, de que Carmen y Alberto pasen es 0.35 y de que Rosa y Alberto pasen es 0.25. La probabilidad de que los tres pasen es 0.20. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Al menos uno de ellos pase el examen?
b) Solamente uno de ellos pase el examen?
c) Carmen y Alberto pasen el examen pero no Rosa?
d) Alberto no pase el examen pero sí al menos una de las mujeres?
e) Ninguno pase el examen?

Solución:

La mejor manera de resolver el problema es hacer un diagrama de Venn para él mismo y determinar la probabilidad de ocurrencia de cada región, esto se muestra en Figura 4.7.

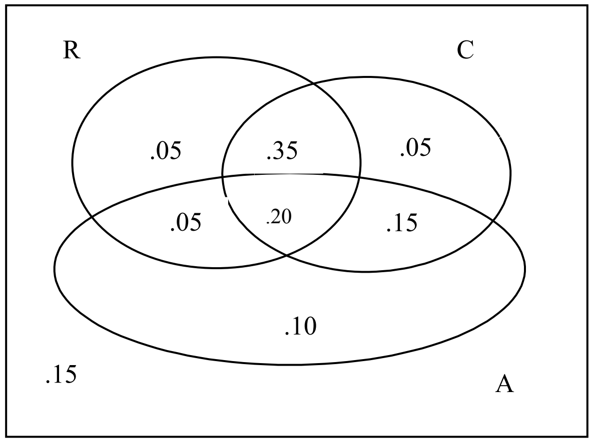


Figura 4.7: Diagrama de Venn para el Ejemplo 4.3.

Luego,

a a)

b) $P(R\cap \overline{C}\cap \overline{A})+P(\overline{R}\cap C\cap \overline{A})+P(\overline{R}\cap \overline{C}\cap A)=.05+.05+.10=.20$

c)

d) $P((C\cup R)\cap \overline{A})=.05+.35+.05=.45$

e)

4.2.2. Método Clásico

Un espacio muestral finito se dice que es **Equiprobable** si cada uno de sus elementos tiene la misma probabilidad de ocurrencia, es decir $P(w_i)=\frac{1}{n}$ para todo $i=1,\ldots,n$.

Ejemplo 4.4. Se lanza un par de dados legales y distinguibles, entonces su espacio muestral dado por:

tiene 36 resultados, cada uno de ellos con probabilidad de ocurrencia $1/36$.

Ejemplo 4.5. De una urna que contiene 5 bolas rojas y 3 negras se extraen dos bolas, una por una y con reposición, entonces el espacio muestral:

S tiene 4 resultados posibles los cuales no ocurren con la misma probabilidad por haber distintos números de bolas de cada color. Más adelante se verá que |, | y |.

Definición. Si un experimento aleatorio tiene un espacio muestral equiprobable S que contiene $\#(S)$ elementos y A es un evento de S que ocurre de $\#(A)$ maneras disintas entonces la probabilidad de ocurrencia de A es:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)}$$

Ejemplo 4.6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga suma mayor que 7 al lanzar un par de dados?

Solución:

El evento ***A***: Suma mayor que 7, incluye los resultados que dan suma 8, 9, 10, 11 ó 12 y éstos ocurren de 5, 4, 3, 2 y 1 maneras repectivamente. Luego $\#(A) = 15$. En el Ejemplo 5 se vio que $\#(S) = 36$, por lo tanto $P(A) = 15/36$.

Ejemplo 4.7. Un oficial de matrícula asigna 2 estudiantes: A y B a 4 secciones: $S1, S2, S3, S4$ de un curso son asignados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Los dos estudiantes sean asignados a la misma sección?
b) Ningún estudiante sea asignado a la sección $S3$?
c) Al menos un estudiante sea asignado a la sección $S1$?

Solución:
La siguiente tabla representa el espacio muestral del experimento

S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**
A	B	-	-	B	-	A	-
A	-	B	-	B	-	-	A
A	-	-	B	-	A	B	-
AB	-	-	-	-	A	-	B
-	AB	-	-	-	B	A	-
-	-	AB	-	-	B	-	A
-	-	-	AB	-	-	A	B
B	A	-	-	-	-	B	-

a) Sea el evento ***A***: Los dos estudiantes son asignados a la misma sección

b) Sea el evento ***B***: Ningún estudiante es asignado a la sección $S3$

c) Sea el evento ***C***: Al menos un estudiante es asignado a la sección $S1$.

Ejemplo: 4.8. 3 carros: *A, B* y *C* se estacionan en fila. ¿Cuál es la probabilidad de que *A* y *C* queden estacionados uno detrás del otro?

Solución:
El siguiente es el espacio muestral del experimento:

E1	**E2**	**E3**
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Sea el evento ***A***: Que los carros A y B quedan estacionados uno detrás del otro. Luego,
.

Ejemplos más complicados requieren la aplicación de técnicas de conteo para determinar el número de maneras como puede ocurrir el experimento y el evento deseado. Estas técnicas son descritas en detalle en la Sección 5 de este capítulo.

4.2.3 Método Frecuencial

Si un experimento se repite n veces y $n(A)$ de esas veces ocurre el evento *A*, entonces la frecuencia relativa de *A* se define por $f_A = \dfrac{n(A)}{n}$.

Se puede notar que:

a) $f_S = 1$

b) $f_A \geq 0$

c) Si A y B son eventos disjuntos entonces

Es decir f_A satisface los axiomas de probabilidad.

Definición. La probabilidad del evento *A* es el valor al cual se aproxima f_A cuando el experimento se ha repetido un gran número de veces. O sea:

La probabilidad es el valor en el cual se estabiliza la frecuencia relativa del evento después de haber repetido el experimento un número grande de veces. La existencia de este valor está garantizando por un resultado llamado ***La Ley de los Grandes números***. Desde el punto de vista práctico se puede considerar que la frecuencia relativa de un evento es un estimado de la probabilidad de ocurrencia del evento.

El problema principal de la definición frecuencial de probabilidad es que, el cálculo de la probabilidad de un evento sería un proceso demasiado lento. El otro problema es que algunas veces es imposible tener un número grande de repeticiones del experimento, por ejemplo, si se desea calcular la probabilidad de que una persona en particular sobreviva una operación quirúrgica, tendríamos que tener información acerca de todas las operaciones de dicha persona, la cual por lo general es muy baja.

Ejemplo 4.9. Según los datos de la siguiente tabla, la probabilidad de que nasca un varón en Estados Unidos es 0.513.

Año 3,159,958 0.5133340 3,326,632 0.5128058	Nacimientos	Frecuencia relativa de varones 3,629,238 0.5125792
1974	3,159,958	0.5133340
1975	3,144,198	0.5130513
1976	3,167,788	0.5127982
1977	3,326,632	0.5128058
1978	3,333,279	0.5128266
1979	3,494,398	0.5126110

1980	3,612,258	0.5128692
1981	3,629,238	0.5125792

4.2.4 Estimando la probabilidad de ocurrencia de un evento

Con la ayuda de la computadora se puede simular la ejecución de un experimento un gran número de veces y haciendo uso de la definición frecuencial se puede estimar la probabilidad de ocurrencia de un evento.

Ejemplo 4.10. Supongamos que lanzamos un par de dados legales y tratamos de estimar la probabilidad de obtener suma 7.

Solución:

Esta probabilidad puede ser determinada exactamente a través del espacio muestral del experimento y es igual a |. Sin embargo, nosotros la podemos estimar a través de simulaciones. Para esto elegimos la opción ***Random Data*** del menú **Calc** y luego la opción **Sample from columns** del submenú de ***Random Data***. Ahora generamos 100 resultados posibles del primer dado y los guardamos en la columna C2 y luego 100 resultados posibles del segundo dado y los guardamos en C3. También se puede generar 200 datos y guardarlos en C2 y C3 (100 en cada una). La ventana de diálogo se muestra abajo. C1 contiene los números 1, 2, 3, 4, 5, 6.

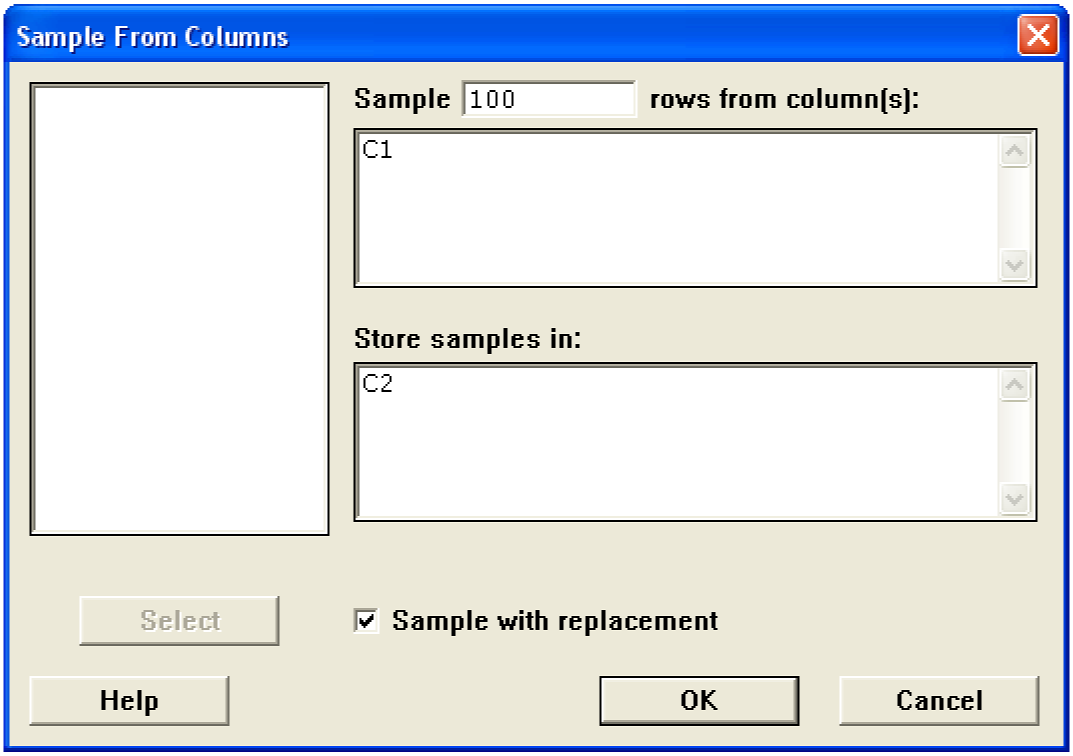


Figura 4.8. Ventana de diálogo para la opción **Samples from columns** del menú **Random Data.**

El próximo paso es calcular la suma de los dos dados. Esto se obtiene eligiendo la opción ***Row Statistics*** del menú **Calc.** De todas las medidas que aparecen se elige **Sum** y se guardan los resultados en C4. La ventana de diálogo es como sigue.

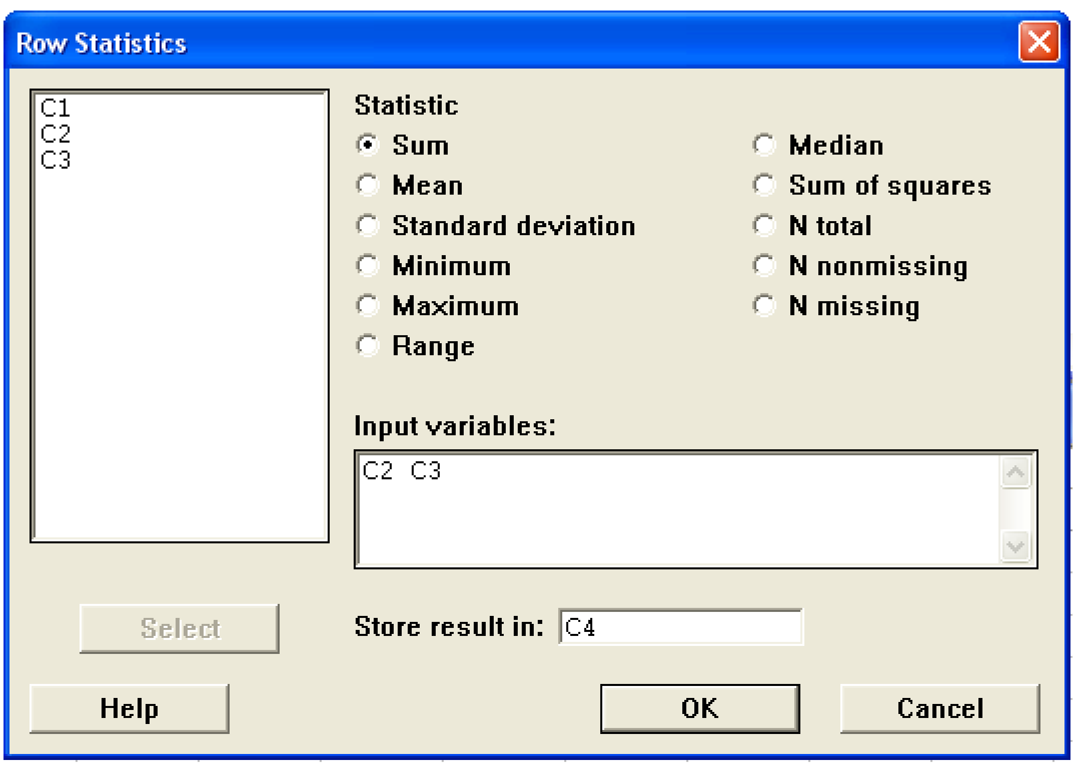


Figura 4.9. Ventana de diálogo de **Row Statistics** del menú **Calc**

Luego se construye una tabla de distribución de frecuencias eligiendo ***Tables*** de **Stat** seguido de ***Tally*** de ***Tables***. Los resultados aparecen en la ventana ***session*** y son como sigue:

Summary Statistics for Discrete Variables

```
    C4  Count  Percent
     2      3     3.00
     3      8     8.00
     4      9     9.00
     5     19    19.00
     6     10    10.00
     7     14    14.00
     8     13    13.00
     9     13    13.00
    10      2     2.00
    11      7     7.00
    12      2     2.00
    N=    100
```

De acuerdo a esta tabla la probabilidad de obtener suma 7 es 0.1400. Para refinar el estimado repetimos el experimento un mayor número de veces. Los resultados aparecen en la siguiente tabla:

Número de Repeticiones	Probabilidad Estimada de obtener Suma 7
100	.1400
500	.1820
1000	.1710
2000	.1580
5000	.1692

Se puede estimar la probabilidad de sacar suma 7 como 0.16 que está bastante cerca del valor exacto.

4.2.5 Método Subjetivo

Algunas personas de acuerdo a su propio criterio generalmente basado en su experiencia, asignan probabilidades a eventos, éstas son llamadas **probabilidades subjetivas**. Por ejemplo:

La Probabilidad de que *llueva mañana* es 40%.

La Probabilidad de que *haya un terremoto en Puerto Rico antes del 2000* es casi cero.
La Probabilidad de que *el caballo Camionero gane el clásico del domingo* es 75%.

Puesto que las probabilidades subjetivas dependen de la persona que las hace se vuelven bien imprecisas y algunas veces puede haber una gran disparidad en las probabilidades que las personas asignan al mismo evento, especialmente cuando es poco o bastante probable que ocurra.

Sin embargo probabilidades subjetivas son usadas frecuentemente en Estadística Bayesiana, en donde las probabilidades de ocurrencia de un evento que se van modificando según la información que uno recoje acerca de otros eventos que puedan afectarlo.

4.3 Probabilidad Condicional

Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral S. La probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido esta dado por:

Esto es equivalente a que el espacio muestral S se ha reducido al evento B (Ver Figura 4.10).

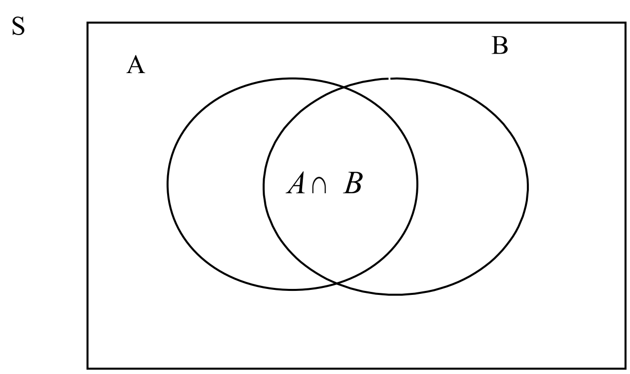


Figura 4.10. Diagrama de Venn de $P(A/B)$

Si el espacio muestral S es equiprobable lo anterior se convierte en:

Ejemplo 4.11. Se lanza un par de dados legales y distinguibles. ¿Cuál es la probabilidad de que solamente uno de los dos dados sea par si se sabe que la suma de los dos es mayor que 8?

Solución:

Sean los eventos ***A***: Que solamente uno de los dos dados sea par y el evento condicionante ***B***: Que la suma sea mayor que 8. Claramente $\#(B) = 10$ y $\#(A \cap B) = 6$. Luego |.

Ejemplo 4.12. ¿Cuál es la probabilidad de que en una familia con tres hijos el menor de ellos sea varón si el mayor lo es?

Solución:

Sean los eventos, ***A***: El menor de los hijos es varón y el evento condicionante ***B***: El hijo mayor es varón. De los 8 resultados del espacio muestral, claramente se tiene que $\#(B) = 4$ y en consecuencia |. Este resultado era esperado porque en teoría el sexo de uno de los hijos no afecta el sexo de los otros por venir.

Ejemplo 4.13. En una ciudad se hizo una encuesta acerca de la opinión de las personas adultas con respecto a una ley del gobierno. La siguiente tabla muestra los resultados de la encuesta clasificados según el sexo del entrevistado.

	A Favor	En contra	Abstenidos Total 22 43 20 85	Total
Hombre	12	28 10 15 12 37	8	48
Mujer	10	15	12	37
Total	22	43	20	85

Se elige al azar una persona

a) ¿Cuál es la probabilidad de que favorezca la ley si resulta ser Mujer?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea Mujer si resulta estar en contra de la ley?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea Hombre si la persona elegida no se abstuvo de opinar?

Solución:

a) |

b)
c)

4.3.1 Regla del Producto.

La fórmula se obtiene despejando de la fórmula de probabilidad condicional. Se usa para calcular la probabilidad de que dos eventos ocurran al mismo tiempo.

Ejemplo 4.14. Una urna contiene 3 bolas rojas y 4 bolas blancas. Se extraen al azar dos bolas de la urna una por una y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) ambas bolas sean rojas?
b) la segunda bola sea roja?
c) sólo una de las dos bolas sea roja?

Solución:
La forma más fácil de resolver el problema es haciendo un diagrama de árbol.

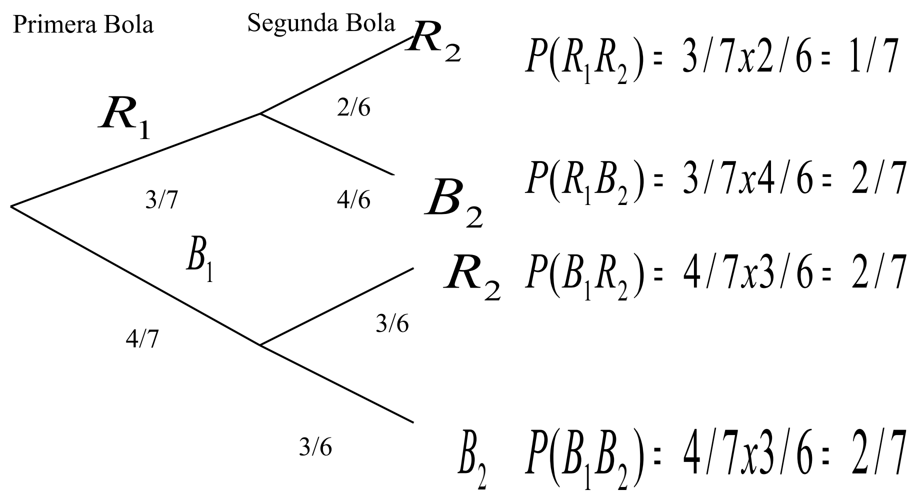


Figura 4.11: Diagrama de árbol para Ejemplo 4.14

Luego,

a)
b) $P(R_2) = P(R_1R_2) + P(B_1R_2) = 3/7 \times 2/6 + 4/7 \times 3/6 = 18/42 = 3/7$
C) $P(R_1B_2) + P(B_1R_2) = 3/7 \times 4/6 + 4/7 \times 3/6 = 24/42 = 4/7$

Ejemplo 4.15. Según la Comisión Electoral de un país, el 90 por ciento de las esposas votan si sus esposos lo hacen, y el 20 por ciento vota si su esposo no lo hace. Además el 70 por ciento de los hombres casados votan. Se elige al azar un matrimonio. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) ambos esposos voten?
b) sólo uno de los esposos vote?
c) vote la esposa?
d) al menos uno de los esposos vote?

Solución:
Sean los eventos V_1: Que vote el esposo y V_2: Que vote la esposa. El problema puede ser representado por el diagrama de árbol de la Figura 4.12.

Luego,

a)

b) $P(V_1\overline{V}_2) + P(\overline{V}_1 V_2) = 0.7 \times 0.1 + 0.3 \times 0.2 = 0.13$

c) $P(V_2) = P(V_1 V_2) + P(\overline{V}_1 V_2) = 0.63 + 0.06 = 0.69$

d) $P(V_1 \cup V_2) = 0.7 + 0.69 - 0.63 = 0.76$

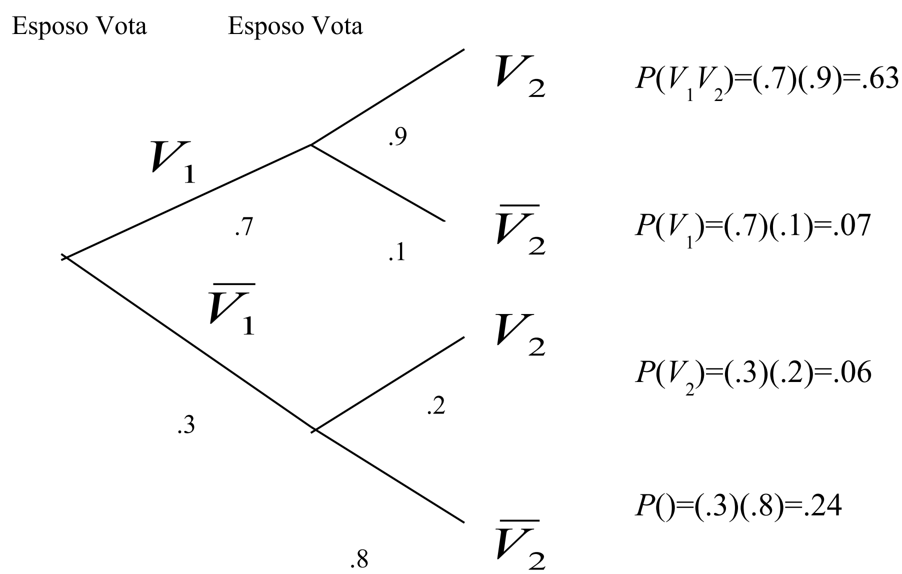


Figura 4.12. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.15.

La regla del producto se puede aplicar a más de dos eventos de la siguiente manera: $P(A_1 \cap ... \cap A_n)P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)...P(A_n / A_1 \cap ...A_{n-1})$
Evidentemente que el uso de un diagrama del árbol se vuelve inadecuado cuando n es grande.

Ejemplo 4.16. Un lote contiene 10 artículos de los cuales 4 son defectuosos, se extraen al azar 3 articulos uno por uno y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Los tres salgan buenos?
b) Sólo uno de los tres salga defectuoso?

Solución:

a) Sea el evento B_i que el *i*-ésimo artículo resulte bueno para $(i = 1,2,3)$. Luego, la probabilidad de que los tres salgan buenos es:

$$P(B_1 B_2 B_3) = P(B_1)P(B_2 / B_1)P(B_3 / B_1 B_2) = 6/10 \times 5/9 \times 4/8 = 1/6$$

b) Sea el evento D_i que el i-ésimo artículo resulte defectuoso para $i = 1,2,3$.

$$P(solo\,un\,defectuoso) = P(D_1 B_2 B_3) + P(B_1 D_2 B_3) + P(B_1 B_2 D_3)$$
$$= 4/10 \times 6/9 \times 5/8 + 6/10 \times 4/9 \times 5/8 + 6/10 \times 5/9 \times 4/8 = 1/2$$

4.3.2 Probabilidad Total y Regla de Bayes

Regla de la Probabilidad Total.

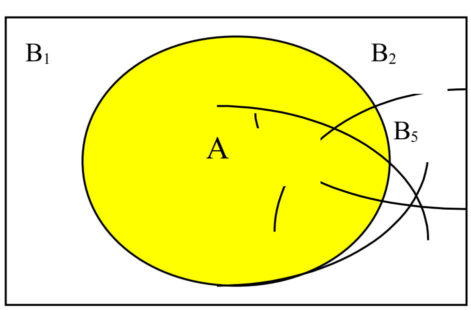
Sean $B_1, \ldots, B_n$ una *colección de eventos* que forman una *partición* del espacio muestral S esto es $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$ y $B_i \cap B_j = \phi$ *para* $i \neq j$. Sea A otro evento definido sobre S entonces:

Notar que . Por la propiedad distributiva, se tiene que , donde la unión es disjunta. Aplicando el tercer axioma se obtiene . Finalmente, se aplica la regla del producto a cada término de la suma y se obtiene la fórmula de probabilidad total.

Para una partición de S en dos eventos B *y* $\overline{B}$ se obtiene:

$$P(A) = P(B)P(A/B) + P(\overline{B})P(A/\overline{B})$$

La siguiente figura ilustra la regla de la probabilidad total para una partición en 5 eventos.



B_3 B_4

Figura 4.13. Teorema de la Probabilidad Total

Ejemplo 4.17. El 70 % de los pacientes de un hospital son mujeres y el 20% de ellas son fumadoras. Por otro lado el 40 % de los pacientes hombres son fumadores. Se elige al azar un paciente del hospital. ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumador?

Solución:
Sean los eventos *F*: Que el paciente sea fumador, *H*: Que el paciente sea hombre y *M*: Que el paciente sea mujer. Claramente,

$$P(F) = P(M)P(F/M) + P(H)P(F/H)$$

Del enunciado del problema se tiene que $P(M) = .7$, $P(H) = .3$, $P(F/M) = .2$ y $P(F/H) = .4$, sustituyendo estos valores en la fórmula anterior se obtiene que . En la Figura 4.14 se muestra el diagrama de árbol correspondiente al problema.

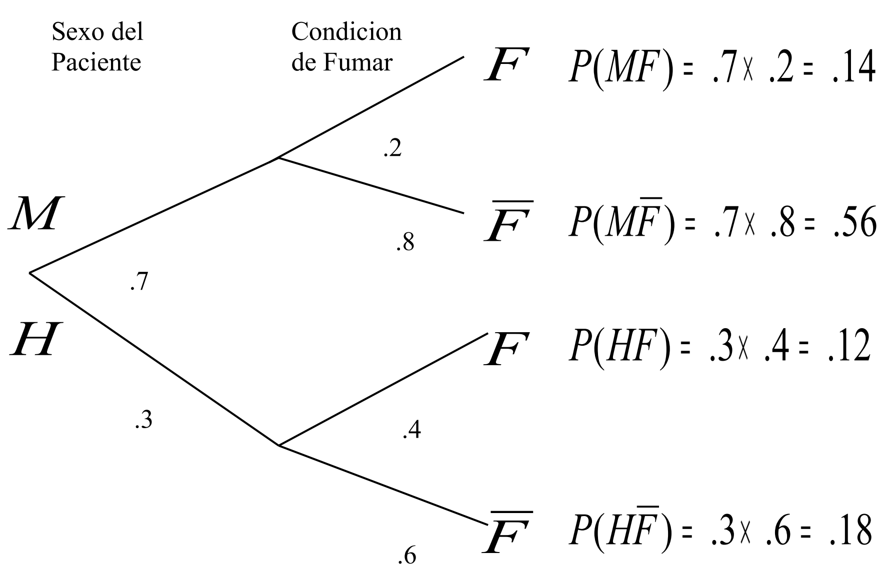


Figura 4.14. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.17

Ejemplo 4.18. En un hospital el 98% de los bebés nacen vivos. Por otro lado, 40% de todos los partos son por césarea y de ellos el 96% sobreviven al parto. Se elige al azar una mujer a la que no se va practicar césarea. ¿Cuál es la probabilidad de que el bebé viva?

Solución:

Sean los eventos ***V***: que el bebe nazca vivo, ***C***: que el parto sea por césarea. Del enunciado del problema $P(V) = .98$, $P(C) = .40$ y . Se desea hallar $P(V/\overline{C})$.

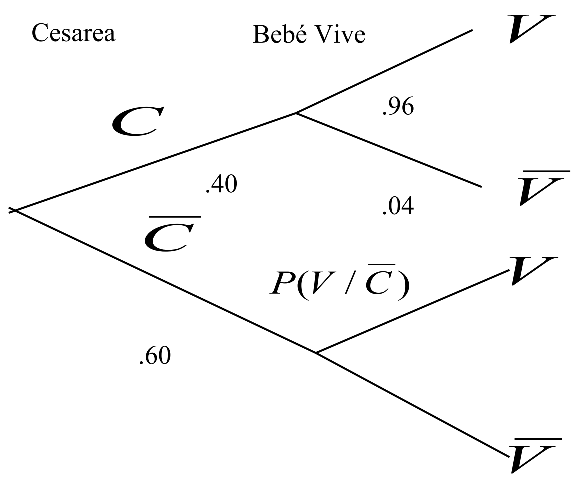


Figura 4.15. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.18.

Por la regla de la probabilidad total $P(V) = P(C)P(V/C) + P(\overline{C})P(V/\overline{C})$, de donde:

$.98 = (.40)(.96) + .60P(V/\overline{C})$, y . Un diagrama de árbol para el problema aparece en la Figura 4.15.

Ejemplo 4.19. Una empresa tiene 3 plantas: *A*, *B* y *C*. La planta A produce el 50% de la producción total, *B* produce el 30% y *C* el 20%. El 3% de la producción de *A* es defectuosa, mientras que el 2% de *B* y el 5% de *C* también lo son. Se elige al azar un artículo producido por la empresa:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo elegido sea defectuoso?
b) Si el artículo elegido resulta ser defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la planta *C*?

Solución:

a) Los eventos A, B y C forman una partición del espacio muestral S correspondiente a elegir un articulo de la fábrica. Luego, si D representa artículo defectuoso:

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$$

Sutituyendo los datos del problema se tiene que

$$P(D) = P(.5)P(.03) + P(.3)P(.02) + P(.2)P(.05) = .031$$

b) $P(C/D) = P(C \cap D)/P(D) = (.2)(.05)/.031 = .010/.031 = .3225$

El diagrama de árbol de la Figura 4.16 representa el problema.

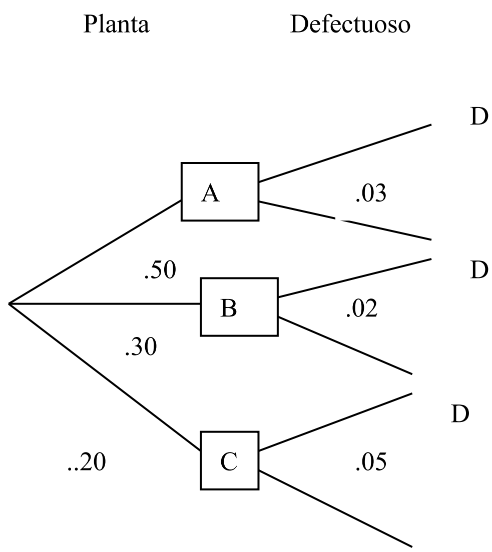


Figura 4.16. Diagrama de árbol para el problema 4.19

La Regla de Bayes

Bajo las mismas condiciones de la regla de probabilidad total, se cumple que:

$$P(B_j / A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Por definición de probabilidad condicional y aplicando la regla del producto en el numerador y probabilidad total en el denominador se obtiene la regla de Bayes.

Ejemplo 4.20. Una prueba para diagnosticar cáncer lo detecta en el 95% de personas que efectivamente tienen la enfermedad y en el 1% de las personas que no tienen la enfermedad. Por estudios previos se ha determinado que sólo el .5% de las personas sometidas a la prueba tienen efectivamente cáncer. Si la prueba da un diagnóstico positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga realmente cáncer?

Solución:

Sean los eventos C: La persona tiene cáncer y D^+ : La persona da un diagnóstico positivo de cáncer.
Hay que hallar $P(C/D^+) = P(C)P(D^+/C)/P(D^+)$, donde

$$P(D^+) = P(C)P(D^+/C) + P(\overline{C})P(D^+/\overline{C}).$$

Como $P(C) = .005$, y , se obtiene que

$$P(D^+) = (.005)(.95) + (.995)(.01) = .00475 + .00995 = .01470$$

Luego, P(C/D^+) = (.005)(.95)/.01470 = .00475/.01470 = .323.

El siguiente diagrama de árbol representa el problema.

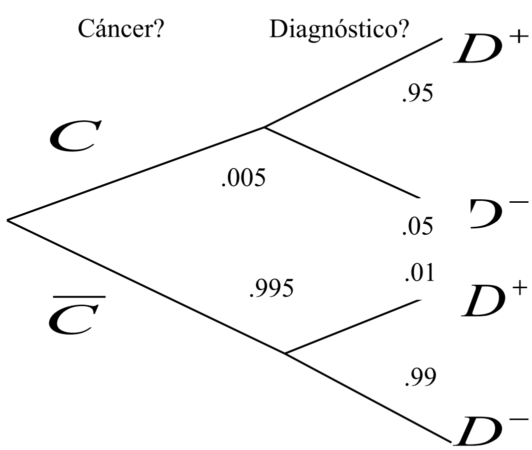


Figura 4.17. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.20

Ejemplo 4.21. Suponga que los chips de un circuito integrado son probados con cierto instrumento y la probabilidad de que se detecten los defectuosos es .99. Por otro lado hay una probabilidad de .95 de que un chip sea declarado como bueno si efectivamente lo es. Si el 1% de todos los chips son defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que un chip que es declarado como defectuoso sea en realidad bueno?

Solución:
Sean los eventos M: Que el chip sea declarado defectuoso por el instrumento, D: Que el chip sea realmente defectuoso y B: Que el chip sea realmente bueno. De los datos del problema se tiene que y , además $P(D) = .01$. Lo que debemos calcular es $P(B/M) = P(B)P(M/B)/P(M)$. Pero, $P(M) = P(D)P(M/D) + P(B)P(M/B)$ = $(.01)(.99) + (.99)(.05) = .0099 + .0495 = .0594$, por lo tanto $P(B/M) = .0495/.0594 = .833$.

Ejemplo 4.22. Una urna I contiene 2 bolas rojas y 4 blancas y una urna II contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Se saca una bola de la urna I y se la coloca en la urna II, luego se saca una bola de ésta la cual resulta ser roja, ¿Cuál es la probabilidad de que la bola pasada de I a II haya sido blanca?

Solución:
Sean los eventos B_1: Que la bola extraida de la urna I sea blanca, R_1: Que la bola extraida de la urna I sea roja, B_2: Que la bola extraida de la urna II sea blanca, R_2: Que la bola extraida de la urna II sea roja. Hay que hallar $P(B_1/R_2) = P(B_1 \cap R_2)/P(R_2)$. Puesto que $P(B_1) = 1/3$, $P(R_1) = 2/3$, y , se tiene que $P(R_2) = P(R_1)P(R_2/R_1) + P(R_1)P(R_2/R_1) = 22/36 = 11/18$, de donde sigue que $P(B_1/R_2) = (1/6)/(11/18) = 3/11 = .42$.

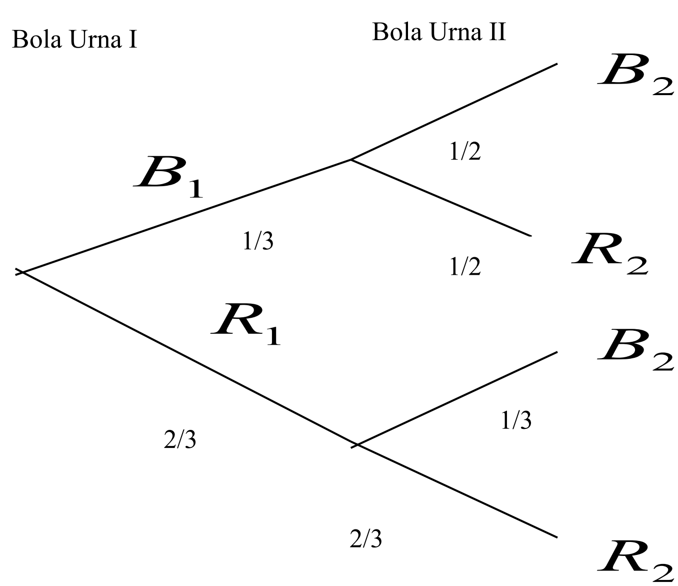


Figura 4.18. Diagrama de árbol para Ejemplo 4.22.

4.4 Eventos Independientes

Dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro. O sea:

o

De la definición de probabilidad condicional se obtiene la siguiente definición equivalente:

Dos eventos A y B son independientes si .

Ejemplo 4.23. Se lanzan un par de dados legales **y** distinguibles y se definen los siguientes eventos:

A: Que el primer dado sea par
B: Que el segundo dado sea mayor que 4

Son los eventos A y B independientes?

Solución:
, , y . Por lo tanto A y *B* son independientes.

Propiedad 5. Si *A* y *B son eventos* independientes, entonces también *lo son:*

a) $\overline{A}$ y B
b) A y $\overline{B}$
c) $\overline{A}$ y $\overline{B}$

Prueba:

a) Como se tiene por independencia de *A* y *B* que $P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap \overline{B})$, luego $P(A \cap \overline{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$.

b) y c) se dejan como ejercicios.

Ejemplo 4.24. Un tirador hace dos disparos a un blanco. La probabilidad de que acierte en el blanco es .8, independientemente del disparo que haga. ¿Cuál es la probabilidad de que el tirador:

a) Acierte ambos disparos?
b) Acierte sólo uno de los dos disparos?

c) Acierte por lo menos un disparo?
d) No acierte ninguno de los dos disparos?

Solución:
Sean los eventos A_i: Que el tirador da en el blanco en el disparo i (i =1, 2). Por aplicación directa de la propiedad 5 se obtiene que:

a) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = (.8)(.8) = .64$
b) $P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = (.8)(.2) + (.2)(.8) = .32$
c) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = (.8) + (.8) - (.64) = .96$
d) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = (.2)(.2) = .04$

El concepto de independencia se puede extender a más de dos eventos. Asi, se dice que los eventos $A_1,\ldots,A_n$ son **Mutuamente Independientes** si para cualquier subcolección A_{i1}, $\ldots,A_{ik}$ se cumple que:

$$P(A_{i1} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})\ldots P(A_{ik})$$

Ejemplo 4.25. Un avión tiene 3 motores los cuales funcionan independientemente uno del otro y fallan con probabilidad igual a .001 para cada uno de ellos. El avión hace un vuelo exitoso si por lo menos uno de sus motores funciona. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión tenga un vuelo exitoso?

Solución:
El avión no tiene un vuelo exitoso si todos sus motores fallan, por independencia esto ocurre con probabilidad $(.001)^3$. Luego, por complemento, la probabilidad de un vuelo exitoso será $1-(.001)^3$.

Ejemplo 4.26. Una persona lanza repetidamente un par de dados. ¿Cuántas veces debe lanzar el par de dados si se desea que la probabilidad de obtener suma igual a 7, al menos una vez, sea por lo menos .95?

Solución:
P(Sacar al menos una vez suma igual a 7) = 1 - P(Nunca sacar suma igual a 7) $\geq$ .95. 0 sea, P(Nunca sacar suma igual a 7) $\leq$ .05. Hay que encontrar el número n de veces que se debe lanzar el par de dados para que esto ocurra. La probabilidad de sacar suma igual a 7 en una tirada de un par de dados es $6/36 = 1/6$, por lo tanto no se saca suma igual a 7 con probabilidad $5/6$. Como hay independencia entre las n tiradas del dado, la probabilidad de no sacar suma igual a 7 en n tiradas será $(5/6)^n$. Luego, el n se obtiene resolviendo la

desigualdad $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq .05$, tomando logaritmos en ambos lados se obtiene |, de donde y |, es decir, basta lanzar el par de dados al menos 17 veces para obtener suma igual a 7.

4.5. Aplicación de técnicas de conteo al Cálculo de Probabilidades

4.5.1 Regla Multiplicativa del conteo

Si un experimento I ocurre de *m* maneras distintas y un experimento II ocurre de *n* maneras distintas entonces, el experimento compuesto de I seguido de II ocurre de $m \times n$ maneras.

Ejemplo 4.27. Un joven tiene 4 pantalones distintos y 6 camisas distintas. El joven se viste en forma diferente todos los días. ¿Cuántos días se puede vestir el joven sin repetir vestimenta?

Solución:
Basta encontrar el total de maneras que se puede vestir que son $4 \times 6 = 24$.
Luego se puede vestir en forma distinta durante 24 días.

La regla multiplicativa se puede generalizar de la siguiente manera: Si un experimento compuesto de *k* experimentos simples, cada uno de los cuales se puede efectuar de $n_i, (1 \leq i \leq k)$ maneras distintas, entonces el experimento compuesto se puede efectuar de maneras distintas.

Ejemplo 4.28. Una contraseña para accesar a una computadora consiste de 36 caracteres que pueden ser letras (26) o números (10).

a) ¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar?
b) ¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar conteniendo sólo números?
c) ¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar si deben tener por lo menos una letra?

Solución:

a) $36 \times 36 \times 36 \times 36 \times 36 \times 36 = 36^6 = 2{,}176{,}782{,}336$

b) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1{,}000{,}000$

c) Por complemento

Ejemplo 4.29. Una caja contiene *n* bolas numeradas desde el 1 hasta la *n*. Se escogen al azar dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que los números en las bolas sean consecutivos

a) Si las bolas se escogen sin reposición?

b) Si las bolas se escogen con reposición?

Solución:
Sea el evento A: Que las dos bolas tengan números consecutivos. Si son consecutivos, en orden ascendente, la primera bola debe tener un número desde el 1 hasta el n-1 y la segunda sólo tendría una posibilidad (por ejemplo 12, 56 etc.). Como también pueden ser consecutivos en orden descendente hay el doble de posibilidades. Por lo tanto .

a) Sin reposición la primera bola puede ser escogida de n maneras y la segunda de $(n-1)$ maneras. Por lo tanto y .

b) Con reposición la primera bola puede ser elegida de n maneras y la segunda también. Por lo tanto $\#(S) = n^2$ y .

4.5.2 Permutaciones

Una permutación es un arreglo ordenado de objetos distintos. Por ejemplo, las permutaciones de tamaño 2 que se pueden hacer con las letras A, B y C son: AB, AC, BC, BA, CA y CB.

Haciendo uso de la regla multiplicativa del análisis combinatorio se desprende que:

i) El número de permutaciones de n objetos tomados todos a la vez está dado por

$$P(n,n) = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

ii) El número de permutaciones de n objetos distintos tomados de r en r está dado por:

$$P(n,r) = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Recordar que 0! = 1.

Ejemplo 4.30. Ocho atletas compiten en la final olímpica de los 110 metros con vallas. Asumiendo que ellos cruzan la meta en distintos instantes. ¿Cuántas maneras distintas hay para entregar las medallas de oro, de plata y de bronce?

Solución:

El primer premio puede ser entregado de 8 maneras, el segundo de 7 y el tercero de 6, luego por la regla multiplicativa hay maneras distintas de entregar los premios. Claramente, esto es $P(8,3) = \frac{8!}{5!}$.

Ejemplo 4.31. Diez personas de diferentes estaturas posan en fila para una foto.

a) ¿Cuántas fotografías distintas se pueden tomar?
b) ¿Cuántas fotografias distintas se pueden tomar si la persona más alta y la persona más baja no deben salir juntas en la foto?

Solución:

a)

b) El evento complemento es que la persona más alta y la más baja salgan juntas en la foto. Esto se puede efectuar de $2\times 9!$ maneras donde $9!$ es el número de ordenamientos de 8 objetos simples y un objeto compuesto de la persona más alta y la más baja y el 2 se bede a que la persona más alta y la más baja se pueden intercambiar. Luego, hay $10! - (2\times 9!)$ fotografias donde la persona más alta y la más baja no salen juntas.

Ejemplo 4.32. Cuatro peruanos, 3 chilenos y 5 mejicanos se sientan en fila.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los de la misma nacionalidad queden juntos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que los de nacionalidad peruana queden juntos?

Solución

El espacio muestral puede ocurrir de maneras distintas.

a) Sea el evento A: Que los de la misma nacionalidad queden sentados juntos. Hay $3!$ maneras de ordenar los tres grupos de nacionalidades, $4!$ maneras de ordenar el grupo de peruanos, $3!$ maneras de ordenar el grupo de chilenos y $5!$ maneras de ordenar el grupo de mejicanos, como se quiere que todo esto ocurra al mismo tiempo, por la regla multiplicativa hay maneras de ocurrencia del evento A. Luego .

b) Sea el evento *B*: que los 4 peruanos queden sentados juntos. Hay que ordenar 9 objetos compuestos de los 3 chilenos, 5 mejicanos y el bloque de los 4 peruanos (dentro del cual se pueden hacer permutaciones). Luego, hay $\#(B) = 4!\times 9!$ maneras como ocurre B *y* $P(B) = \frac{4!\times 9!}{12!}$.

Ejemplo 4.33. Cuatro turistas llegan a un pueblo que tiene 6 hoteles. Si los turistas eligen al azar el hotel donde se van a alojar. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Todos se hospeden en hoteles distintos?
b) Por lo menos dos de ellos se hospeden en el mismo hotel?

Solución:

Cada uno de los 4 turistas tiene 6 maneras distintas de hospedarse por lo tanto, el experimento puede ocurrir de $\#(S) = 6^4$ x 3 maneras.

a) Sea el evento A: Que los 4 turistas se hospeden en distintos hoteles. Esto puede ocurrir de maneras. Por lo tanto.

b) Sea el evento B: Por lo menos dos turistas se alojen en el mismo hotel. Este evento es simplemente el complemento del evento A. Luego .

4.5.3 Combinaciones

Una combinación es una selección de objetos donde el orden en que estos han sido escogidos no interesa. Por ejemplo, las combinaciones que se pueden hacer con los objetos: A, B y C elegidos de dos en dos son: AB, AC y BC. Observe que el número de permutaciones obtenidas anteriormente fue el doble.

El número de combinaciones de *n* objetos tomado de *r* en *r* está dado por:

Como 0! = 1, se tiene que

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Ejemplo 4.34.

$$\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15}{120} = 3003$$

Propiedad 5.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Prueba. Algebráicamente esto es obvio. Desde el punto de vista de análisis combinatorio el lado izquierdo equivale a elegir *r* objetos de un total de *n* que salen fuera, y el lado derecho equivale a elegir *n-r* objetos que se quedan.

Por ejemplo $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$.

Ejemplo 4.35. De un grupo de 4 mujeres y 6 hombres se va a elegir un comité de 5 meinbros.

a) ¿Cuántos comités se pueden elegir?
b) ¿Cuántos comités se pueden elegir si deben haber 3 hombres?
c) ¿Cuántos comités se pueden elegir si debe haber al menos una mujer?

Solución:

a) Hay $\binom{10}{5} = 252$ comités posibles.

b) Si hay que elegir 3 hombres y el comité tiene 5 integrantes entonces hay que elegir también dos mujeres. Por lo tanto hay maneras de elegir el comité.

c) Lo opuesto a que el comité tenga al menos una integrante mujer es que no haya mujeres en el comité, es decir que los 5 integrantes sean hombres. Por lo tanto, usando complemento, hay posibles comités.

Ejemplo 4.36. Una señora tiene 8 amigas y desea invitar a 5 de ellas a una fiesta. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si dos de ellas están enojadas entre si y no pueden ser invitadas juntas?

Solución:

Hay $\binom{6}{3} = 20$ invitaciones posibles donde las dos personas en disputa pueden ser invitadas juntas, y hay un total de $\binom{8}{5} = 56$ invitaciones que se pueden hacer.

Luego, usando complemento hay $56 - 20 = 36$ invitaciones donde las dos personas enemistadas no aparecen juntas.

Ejemplo 4.37. De un grupo de 5 científicos argentinos, 3 chilenos, 2 colombianos y 2 peruanos se van a elegir al azar 6 para representar a sudamérica en un congreso mundial. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Salgan elegidos 2 argentinos y dos chilenos?
b) Salga elegido por lo menos un peruano?

Solución:

Hay $\binom{12}{6} = 924$ maneras de elegir sin ninguna restricción los 6 representantes.

a) Sea el evento A: Salgan elegidos 2 argentinos y dos chilenos. Los otros dos representantes pueden ser elegidos de los 4 restantes. Luego, y $P(A) = \frac{180}{924}$.

b) Sea el evento B: Salga elegido por lo menos un peruano. Por complemento .

Como , se tiene que .

Ejemplo 4.38. Un profesor asigna una semana antes del examen un conjunto de 10 problemas. El examen consistirá de 5 problemas elegidos al azar de entre los 10 asignados. Un estudiante sólo pudo resolver 7 de esos problemas. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante

a) Conteste bien 3 de las 5 preguntas?
b) Tenga por lo menos 4 preguntas buenas?

Solución:

El experimento puede ocurrir de maneras distintas.

a) Sea A: Que tenga bien 3 de las 5 preguntas . Luego $P(A) = \frac{105}{252}$.

b) Sea B: Que tenga por lo menos 4 buenas. Hay que sumar las maneras de obtener 4 y 5 buenas. Luego y .

Ejemplo 4.39. El juego de la LOTTO de Puerto Rico consiste en acertar 6 números entre el 1 y el 38. El primer premio se otorga a los que aciertan los 6 números, el segundo premio a los que aciertan 5 de los 6, y el tercer premío a los que aciertan 4 de los 6. Si una persona compra un boleto de la LOTTO. ¿Cuál es la probabilidad de que se gane:

a) El primer premio?
b) El segundo premio?
c) El tercer premio?

Solución:
Sea $\#(S)$: Total de maneras como puede salir el número premiado. Claramente, como el orden no importa .

a) Sea el evento A: Sacarse el primer premio. Sólo hay una manera como puede ocurrir esto, y es cuando los 6 números elegidos en el sorteo son los que el jugador tiene. O sea,

y en consecuencia $P(A) = \frac{1}{2{,}760{,}681} = .00000036$.

b) Sea el evento B: Sacarse 5 de los 6 números. Uno de los 6 números del apostador NO es sacado en el sorteo, luego y $P(B) = \frac{192}{2{,}760{,}681} = .000069$.

c) Sea el evento C: Sacarse 4 de los 6 números. En este caso, dos de los 6 números del apostador NO salen en el sorteo, luego y .

Ejemplo 4.40. Cuatro personas suben al ascensor en el sótano de un edificio de 7 pisos. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Exactamente dos de ellas bajen en el quinto piso?
b) Todas ellas bajen en un mismo piso?
c) Dos de ellas bajen en un mismo piso y las otras dos bajen también en un mismo piso?

Solución:
Cada una de las 4 personas tiene 7 maneras distintas de bajarse. Luego hay maneras de efectuar el experimento sin ninguna restricción.

a) Sea el evento A: Que dos de ellas bajen en el quinto piso. Hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de elegir las dos personas y las dos restantes pueden bajar en cualquiera de los 6 pisos restantes.

Luego , y en consecuencia $P(A) = \frac{216}{2401}$.

b) Sea el evento B: Que todas las 4 bajen en el mismo piso**,** puesto que hay 7 maneras de elegir el piso donde bajan las personas se tiene que $\#(B) = 7$ y $P(B) = \frac{1}{7^3}$.

c) Sea el evento C: Que dos personas bajan en un mismo piso **y** las otras dos también. Hay $\binom{7}{2} = 21$ maneras de elegir los 2 pisos donde bajan las personas, hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de elegir las dos personas que bajan en un piso, y $\binom{2}{2} = 1$ manera de elegir las dos personas que bajan en el otro. En consecuencia $\#(C) = 126$ y $P(C) = \frac{126}{2401}$.

Ejemplo 4.41. Un estacionamiento para carros tiene 8 lugares disponibles colocados en línea. Cinco carros de diferentes modelos arrivan al estacionamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Los 5 carros se estacionen todos juntos sin dejar lugar vacio entre ellos?
b) Los 3 lugares vacíos queden juntos?

Solución:
Hay maneras de efectuar el experimento.

a) Sea el evento A: Que los 5 carros queden juntos. Hay que permutar 4 objetos: los 3 lugares vacios y el bloque de los 4 carros. Esto se puede hacer de maneras, luego $P(A) = \frac{480}{6720}$.

b) Sea el evento B: Que los 3 lugares vacios queden juntos. Hay que permutar 6 de los 5 carros **y** el bloque de lugares vacíos. Esto se puede hacer de $6! = 720$ maneras, luego $P(B) = \frac{720}{6720}$.

Ejemplo 4.42. Doce policías recién graduados de la acadèmia son asignados al azar a 6 pueblos uno de los cuales es Mayagüez. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) 4 de los policías sean asignados a Mayagüez?
b) 2 de los pueblos reciban 3 policías, otros dos reciban 2 policías y los restantes dos uno cada uno?

Solución:

El experimento se puede efectuar de $\#(S) = 6^{12}$ maneras.

a) Sea el evento *A*: Que 4 de los 12 policías sean asignados a Mayagüez, esto se puede efectuar de maneras. Por lo tanto P(A)=.

b) Sea el evento *B*: Que dos pueblos reciban 3 policías, dos reciban 2 policías y los restantes 2 uno cada uno. Esto se puede efectuar de:

$$\binom{6}{2}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{4}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$$

Los tres primeros elementos del producto representan las maneras de elegir dos pueblos y luego asignar 3 policías en ellos, los próximos tres elementos representan las maneras de elegir otros dos pueblos y luego asignar dos policias en ellos y los últimos 3 elementos son las maneras de elegir los dos pueblos restantes y asignar un policía en cada uno.

También se puede resolver usando permutaciones con elementos repetidos y en este caso:

Luego $P(B) = \dfrac{6/(2!)^3 12!/(3!)^2(2!)^2}{6^{12}}$.

EJERCICIOS

1. Un metereólogo afirma que la probabilidad de que llueva el sábado es 25%, la probabilidad de que llueva el domingo es 20% y la probabilidad de que llueva ambos dias es 15%. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva durante el fin de semana?

2. En una universidad el 60% de los estudiantes ni fuman ni beben. Además el 30% fuma y el 25% bebe. Se elige al azar un estudiante, ¿Cuál es la probabilidad:
   a) Que tenga al menos uno de los dos hábitos?
   b) Que tenga sólo uno de los hábitos?
   c) Que sea un bebedor y fumador?

3. Un grupo de 6 hombres y 6 mujeres es dividido al azar en dos grupos de tamaño 6. ¿Cuál es la probabilidad de que:
   a) Ambos grupos tengan el mismo número de hombres?
   b) Un grupo tenga dos mujeres y el otro 4?

4. Si 10 bolas son distribuidas al azar en 4 urnas. ¿Cuál es la probabilidad de que la cuarta urna contenga exactamente 3 bolas?

5. 60 niños de segundo grado son asignados al azar en dos clases de 30 cada uno. Cinco de ellos: Diana, Ana, Sofía, Michelle y Paula son amigas intimas:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas ellas sean asignadas a la misma clase?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de ellas sean asignadas a la misma clase?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que Diana esté en una clase y sus amigas en la otra?

6. Un catador de vinos afirma que puede distinguir entre 4 variedades de un vino Cabernet. ¿Cuál es la probabilidad de que el catador logre identificar correctamente las 4 variedades de vino si le dan a probar 4 vasos donde no aparecen marcadas las variedades del vino?

7. Una Urna A contiene 3 bolas rojas y dos bolas blancas y, una Urna B tiene 2 bolas rojas y 5 blancas. Se lanza una moneda legal y si sale cara se extrae una bola de la Urna A, en caso contrario la bola es sacada de B.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea roja?
   b) Si la bola extraída fue roja, ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda haya salido cara?

8. Se lanza un par de dados y la suma que aparece es 6, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dados salió 3?

9. Una pareja de esposos tiene dos hijos
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean niñas si la mayor lo es?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean niñas dado que una de ellas es niña?

10. En una ciudad el 1.5% de personas sufren de Daltonismo. Por otro lado, 55% de la población son mujeres y el .5% de ellas sufre de Daltonismo. Si se elige al azar una persona y se encuentra que sufre de Daltonismo; ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?

11. Una urna contiene 3 bolas rojas y dos blancas. Se extrae una bola, se observa su color y luego se devuelve a la urna junto con otra bola del mismo color, luego se extrae una segunda bola:
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraida sea blanca?
    b) Si la segunda bola extraída fue blanca; ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

12. Una compañia de seguros clasifica a sus clientes como de alto, mediano y bajo riesgo, ellos reclaman el pago de un seguro con probabilidades .02, .01 y .0025 respectivamente. El 10% de los clientes son de alto riesgo, el 20% de mediano y el 70% de bajo riesgo. Si uno de los clientes reclama el pago de un seguro; ¿Cuál es la probabilidad de que sea uno de bajo riesgo?

13. Se tienen 3 tarjetas iguales excepto que una tiene ambos lados rojos, otra ambos lados negros, y la tercera un lado rojo y otro negro. Se elige al azar una tarjeta y se muestra uno de sus lados que resulta ser rojo; ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lado de la tarjeta sea también rojo?

14. Una caja tiene 3 monedas, una de ellas tiene dos caras, la otra dos cruces y la tercera cara por un lado y cruz por el otro. Se escoge una moneda al azar y se muestra uno de sus lados que resulta ser cara; ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lado de la moneda sea también cara?

15. a) Se colocan al azar 8 bolas en 8 urnas, cuál es la probabilidad de que quede solamente una vacia?
    b) Si sólo hay disponibles 5 urnas para colocar las 8 bolas; ¿Cuál es la probabilidad de que la primera urna contenga exactamente dos bolas?

16. Una fábrica tiene tres turnos El 1% de los artículos producidos en el primer turno son defectuosos, 2% de los artículos del segundo turno son defectuosos y el 5% de los artículos del tercer turno también son defectuosos. Si en todos los turnos se produce la misma cantidad de artículos, ¿Qué porcentaje de los artículos producidos en un dia son defectuosos?
    Si un artículo salió defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido en el tercer turno?

17. Una urna contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extraen 4 de estas bolas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda de ellas en orden ascendente de magnitud sea 4?

18. a) Se lanzan 6 dados, ¿Cuál es la probabilidad de que salgan cada uno de los números posibles?
    b) Reponder la parte a) si se lanzan 7 dados.

19. El 60 por ciento de los estudiantes de una escuela no usan ni anillo ni cadena. Por otro lado el 20 por ciento usan anillos y el 30 por ciento usan cadenas. Se elige un estudiante al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté usando:
    a) Anillo y cadena?
    b) Solamente una de las dos prendas?

20. Un consejero académico hace una encuesta a 1000 graduandos de escuela superior para tratar de relacionar el promedio de graduación y su decisión acerca de lo que piensa estudiar en la universidad.

	Promedio Academico		
	2.0 -2.99	3.0-3.49	3.5-4.00
Decidido	50	100	150
Indeciso	350	250	100

Se elige al azar un graduando
    a) Si resulta que él está indeciso, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga promedio de 3.5 ó más?
    b) Si resulta que su promedio es menor que 3.0, ¿Cuál es la probabilidad de que haya decidido qué estudiar en la universidad?
    c) Si resulta que él está decidido, ¿Cuál es la probabilidad de tenga promedio de 3.0 ó más?
    d) Si su promedio es menor que 3.5, ¿Cuál es la probabilidad de que aún no se haya decidido?

21. En un lote de 50 neveras hay 6 dañadas y 44 buenas. Se eligen al azar dos neveras una por una y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que:
    a) Ambas neveras salgan dañadas?
    b) Sólo una de las neveras salga dañada?
    c) Por lo menos una de las neveras salga dañada?
    d) La segunda salga dañada?

22. En un proceso de reclutamiento de personal se ha determinado que la probabilidad de que a un entrevistado se le haga una oferta de empleo es .3 independientemente de quién sea.. Juan, Pedro y Lilliam son entrevistados. ¿Cuál es la probabilidad de que:
    a) A todos ellos se les haga oferta de empleo?
    b) Al menos a uno de ellos se le haga oferta de empleo?