CAPÍTULO 7

INFERENCIA ESTADÍSTICA

La Inferencia Estadística comprende los métodos que son usados para obtener conclusiones de la población en base a una muestra tomada de ella. Incluye los métodos de estimación de parámetros y las pruebas de hipótesis. En la estimación de parámetros la idea es hallar un estimado del parámetro poblacional usando una muestra aleatoria tomada de la población. Uno espera que el estimado esté lo más cerca posible del parámetro. Por ejemplo la media muestral estima la media poblacional.

La **Estimación de parámetros** comprende a su vez la Estimación Puntual, en donde se estudian los diversos métodos de encontrar estimadores y las propiedades óptimas que deben tener éstos, y la **Estimación por Intervalos de Confianza,** en donde se estima un parámetro usando un intervalo centrado en un estimado del parámetro y de longitud igual a dos veces el error de estimación. El Error de estimación depende del nivel de confianza deseado, usualmente, 90, 95 ó 99 por ciento.

En este texto solamente se tratará el cálculo de intervalos de confianza. Los diversos métodos de encontrar estimadores y las propiedades de estimadores óptimos son discutidos en un curso de Estadística Matemática.

Una **Hipótesis Estadística** es una afirmación que se hace acerca de un parámetro poblacional. Por ejemplo, el tiempo de vida promedio para una persona diagnosticada con cáncer de pulmón es 180 días. El porcentaje de personas que favorecen a un candidato a la presidencia es 60%.

La afirmación que está establecida y que se espera sea rechazada después de aplicar una **prueba estadística** es llamada la ***hipótesis nula*** y se representa por H_o.

La afirmación que se espera sea aceptada después de aplicar una **prueba estadística** es llamada la ***hipótesis alterna*** y se representa por H_a.

Una **prueba estadística** es una fórmula, basada en la distribución del estimador del parámetro que aparece en la hipótesis y que va a permitir tomar una decisión acerca de aceptar o rechazar una hipótesis nula.

Al igual que una prueba de laboratorio para detectar cierta enfermedad, una prueba estadística no es cien por ciento segura y puede llevar a una conclusión errónea. Por ejemplo, no es frecuente pero puede ocurrir que una prueba de sangre para detectar una enfermedad E concluya que una persona sana tiene la enfermedad E, o que una persona no tiene la enfermedad E cuando en realidad si la tiene.

Hay dos tipos de errores que pueden ocurrir. El ***error tipo I***, que se comete cuando se rechaza una hipótesis nula que realmente es cierta y el ***error tipo II*** que se comete cuando se acepta una hipótesis nula que realmente es falsa.

El **nivel de significación,** representada por α, es la probabilidad de cometer ***error tipo I***, y por lo general se asume que tiene un valor de .05 ó .01. También puede ser interpretado como el área de la región que contiene todos los valores posibles de la prueba estadística para los cuales la hipótesis nula es rechazada.

La probabilidad de cometer ***error tipo II***, representado por β y al valor $1-\beta$ se le llama ***la potencia de la prueba***. Una buena prueba estadística es aquella que tiene una potencia de prueba alta.

En este capítulo, primero se discutirá el cálculo de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis para la media poblacional, para una proporción y finalmente para la varianza de una población. Luego se tratarán los intervalos de confianza y prueba de hipótesis para la razón de dos varianzas poblacionales, para la diferencia de dos medias poblacionales y por último para la diferencia de dos proporciones.

7.1 Inferencias acerca de la Media Poblacional (varianza conocida).

Supongamos que de una población normal con media desconocida μ y varianza conocida σ^2 se extrae una muestra de tamaño n, entonces de la distribución de la media muestral $\bar{x}$ se obtiene que:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

se distribuye como una normal estándar. Luego $P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$. Donde $Z_{\alpha/2}$ es el valor de la normal estándar tal que el área a la derecha de dicho valor es $\alpha/2$, como se muestra en la siguiente figura:

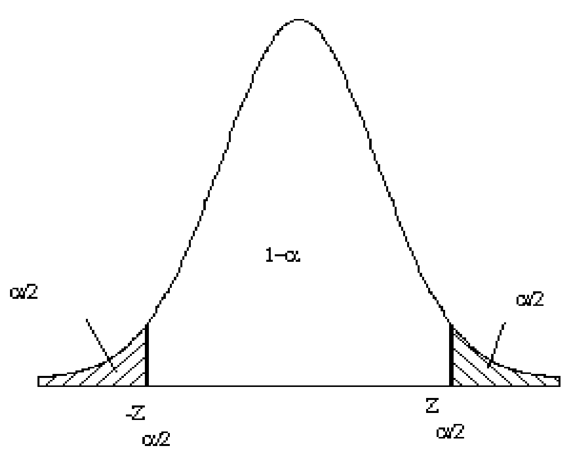


Figura 7.1. Relación de $\alpha/2$ y $Z_{\alpha/2}$ en la curva normal estándar

Sustituyendo la fórmula de Z se obtiene:

$$P(-Z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Haciendo un despeje algebráico, se obtiene

$$P(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

Notar que los dos extremos del intervalo son aleatorios. Si se toma una muestra aleatoria y se calcula su media entonces los extremos del intervalo dejan de ser aleatorios y ya no se puede hablar de probabilidad sino de confianza. De lo anterior se puede concluir que un Intervalo de Confianza del 100 (1-α) % para la media poblacional μ, es de la forma:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\,,\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$$

Usualmente α = .1, .05 ó .01, que corresponden a intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento respectivamente. La siguiente tabla muestra los $Z_{\alpha/2}$ más usados.

Nivel de Confianza	$Z_{\alpha/2}$
90	1.645
95	1.96
99	2.58

Usando **MINITAB** se pueden hallar intervalos de confianza y hacer prueba de hipótesis para μ. Para esto se sigue la secuencia **Stat** ▸ ***Basic Statistics*** ▸ ***1-sample Z***

Ejemplo 7.1 Un cardiólogo desea hallar un intervalo de confianza del 90% para el nivel colesterol promedio de todos los pacientes que presentan problemas cardiacos. Para esto asume que la distribución de los niveles de colesterol es normal con una desviación estandar σ = 13 y usa la siguiente muestra al azar de niveles de colesterol de 20 pacientes con problemas cardiacos.

217	223	225	245	238	216	217	226	202	233	235
242	219	221	234	199	236	248	218	224		

Solución:
Después de entrar los datos en la columna ***colesterol***, la ventana de diálogo será completada como lo muestra la siguiente figura:

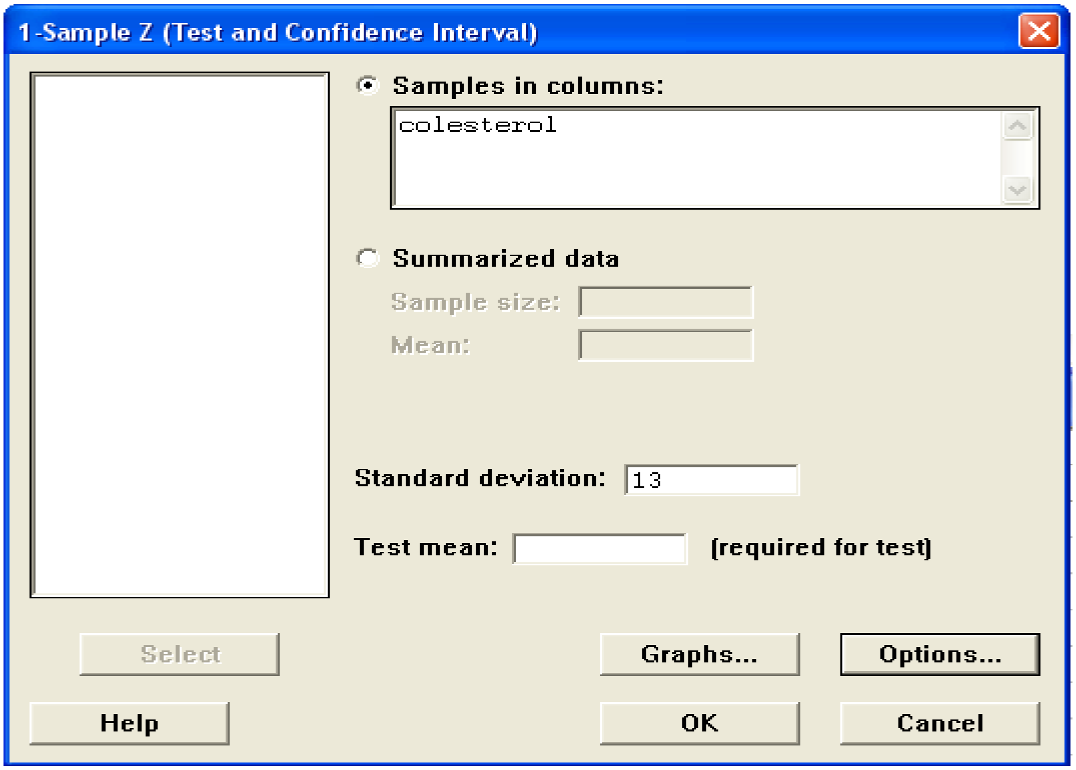
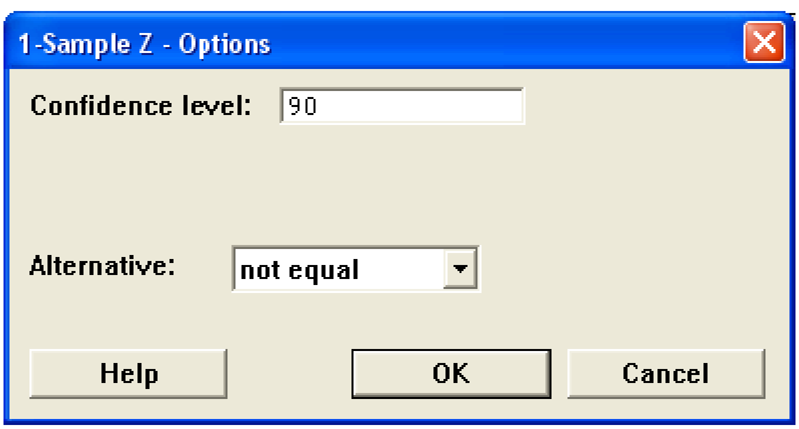


Figura 7.2. Ventana de diálogo de **1-sample Z** para el Ejemplo 7.1

No se escribe nada en la ventanita **Test mean**. Luego hay que oprimir el botón **Options** para entrar el nivel de confianza como lo muestra la siguiente figura:



Aún cuando en **Alternative** aparece **not equal, MINITAB** sólo calculará el Intervalo de confianza tal como aparece en la ventana **session:**

One-Sample Z: colesterol

```
The assumed standard deviation = 13

Variable      N       Mean     StDev    SE Mean        90.0 % CI
colester     20     225.90     13.09      2.91    ( 221.12,    230.68)
```

Interpretación: *Hay un 90% de confianza de que el nivel de colesterol de todos los pacientes con problemas cardíacos caiga entre 221.12 y 230.68.*

En la práctica si la media poblacional es desconocida entonces, es bien probable que la varianza también lo sea puesto que en el cálculo de σ^2 interviene μ. Si ésta es la situación, y si el tamaño de muestra es grande (n > 30, parece ser lo más usado), entonces σ^2 es estimada por la varianza muestral s^2 y se puede usar la siguiente fórmula para el intervalo de confianza de la media poblacional:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\ s/\sqrt{n}\ ,\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\ s/\sqrt{n}$$

Ejemplo 7.2 Supongamos que la distribución de los puntajes en la prueba de aprovechamiento matemático del College Board de los estudiantes admitidos a cierta universidad en 1994 se comportan normalmente. Se extrae una muestra de 40 estudiantes que tomaron la prueba y se obtienen los siguientes datos:

```
Aprovech
        658      562      679      731      710      631      663
        654      565      654      669      710      720      700
        657      721      795      635      617      580      638
        642      704      767      641      721      625      694
        615      617      623      689      689      683      702
        694      729      710      689      741
```

Hallar un intervalo de confianza del 95% para el puntaje promedio en la prueba de aprovechamiento de todos los estudiantes admitidos a la Universidad.

Solución:
Primero, debemos estimar la desviación estándar muestral s. Escoga ***Column Statistics*** del menú **Calc** y luego en la ventana de diálogo escoga ***standard deviation*** y guarde el resultado en la constante s. En la ventana **session** se obtendrá:

Column Standard Deviation

Standard deviation of aprovech = 51.862

Seguidamente elija la secuencia **Stat** ▸ ***Basic Statistics*** ▸ ***1-sample Z*** y complete la ventana de diálogo ***1-sample Z*** como sigue:

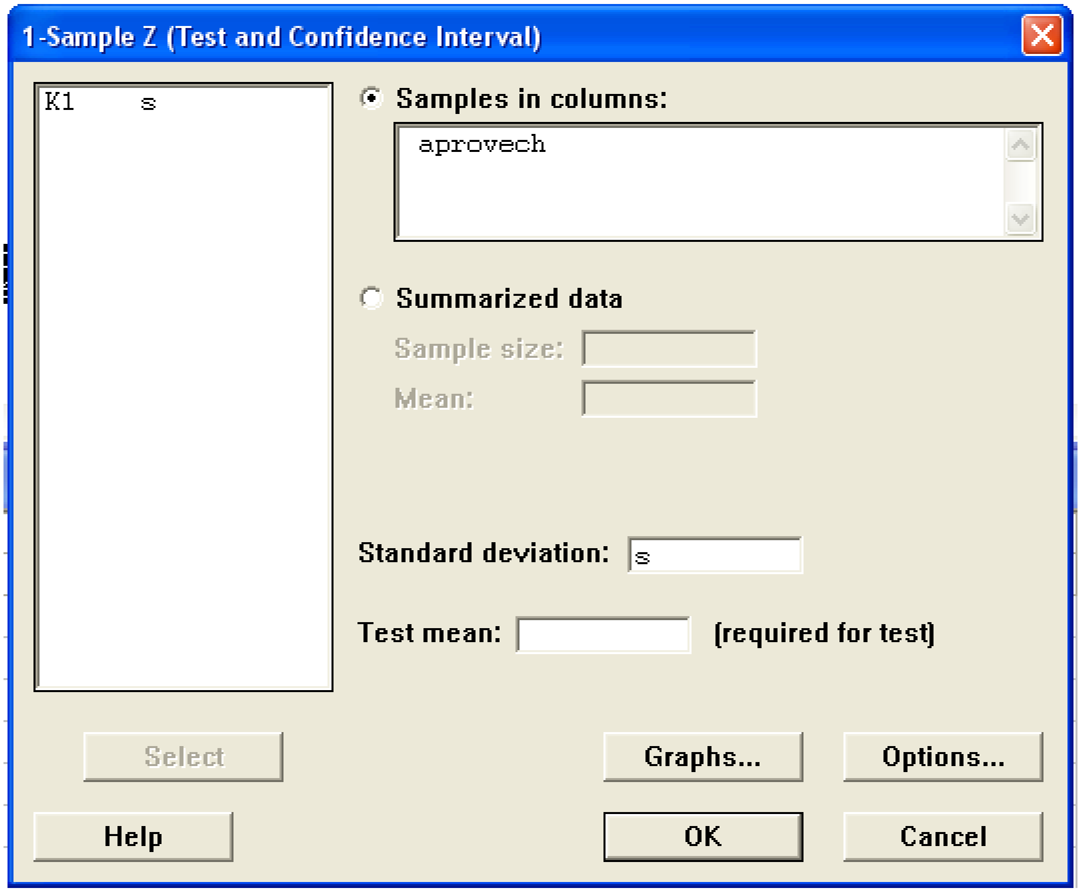


Figura 7.3. Ventana de diálogo de **1-sample Z** para el Ejemplo 7.2.

Luego oprima el botón **Options** y en la ventanita **Confidence Level** entre 95. En la ventana **session** aparecerá lo siguiente:

One-Sample Z: aprovech

```
The assumed standard deviation = 51.8617


Variable   N     Mean    StDev  SE Mean        95% CI
aprovech  40  673.100   51.862    8.200  (657.028, 689.172)
```

Interpretación: *Hay un 95% de confianza de que la media del puntaje en la parte de aprovechamiento matemático de todos los estudiantes que tomaron el College Board caiga entre 657 y 689 puntos.*

Por otro lado, también se pueden hacer pruebas de hipótesis con respecto a la media poblacional μ. Por conveniencia, en la hipótesis nula siempre se asume que la media es igual a un valor dado. La hipótesis alterna en cambio, puede ser de un sólo lado: menor ó mayor que el número dado, ó de dos lados: distinto a un número dado.

Existen dos métodos para hacer la prueba de hipótesis: el método clásico y el método del "*P-value*".

En el método clásico, se evalúa la prueba estadística de Z y al valor obtenido se le llama ***Z calculado*** (Z_{calc}). Por otro lado el nivel de significancia α, definido de antemano determina una región de rechazo y una de aceptación. Si Z_{calc} cae en la región de rechazo, entonces se concluye que hay suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula basada en los resultados de la muestra tomada.

Las fórmulas están resumidas en la siguiente tabla:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
$H_o: \mu=\mu_0$	$H_o: \mu=\mu_0$	$H_o: \mu=\mu_0$
$H_a: \mu<\mu_0$	$H_a: \mu\neq\mu_0$	$H_a: \mu>\mu_0$
	Prueba Estadística:	
	$Z = \dfrac{\bar{x}-\mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	
	Decisión:	
Si $Z_{cal} < -Z_\alpha$ *entonces* se rechaza H_o	*Si* $\lvert Z_{cal}\rvert > Z_{\alpha/2}$ entonces se rechaza H_o	Si $Z_{cal} > Z_\alpha$ entonces se rechaza H_o

Aquí Z_α es el valor de la normal estándar tal que el área a la derecha de dicho valor es α. Recordar también que σ puede ser sustituído por s, cuando la muestra es relativamente grande ($n > 30$). Los valores de α más usados son 0.01 y 0.05. Si se rechaza la hipótesis nula al .01 se dice que la hipótesis alterna es altamente significativa y al .05 que es significativa.

Trabajar sólo con esos dos valores de α simplificaba mucho el aspecto computacional, pero por otro lado creaba restricciones. En la manera moderna de probar hipótesis se usa una cantidad llamada "***P-value*".**

Nota*: El "P-value" llamado el nivel de significación observado, es el valor de* α *al cual se rechazaría la hipotesis nula si se usa el valor calculado de la prueba estadística. En la práctica un "P-value" cercano a 0 indica un rechazo de la hipótesis nula. Así un "P-value" menor que .05 indicará que se rechaza la prueba estadística.*

Fórmulas para calcular "P-value": Depende de la forma de la hipótesis alterna

i) Si H_a: $\mu > \mu_o$, entonces *P-value* = *Prob* $(Z>Z_{calc})$.
ii) Si H_a: $\mu < \mu_o$, entonces *P-value* = *Prob* $(Z<Z_{calc})$.
iii) Si H_a: $\mu \neq \mu_o$, entonces *P-value* = *2Prob* $(Z>|Z_{calc}|)$.

Los principales paquetes estadísticos, entre ellos MINITAB, dan los *"P-values"* para la mayoría de las pruebas estadísticas.

A través de todo el texto usamos el método del *"P-value"* para probar hipótesis.

Ejemplo 7.3. En estudios previos se ha determinado que el nivel de colesterol promedio de pacientes con problemas cardíacos es 220. Un cardiólogo piensa que en realidad el nivel es más alto y para probar su afirmación usa la muestra del Ejemplo 7.1. ¿Habrá suficiente evidencia estadística para apoyar la afirmación del cardiólogo? Justificar su contestación.

Solución:
La hipótesis nula es H_o: $\mu = 220$ (el nivel de colesterol promedio es 220)
La hipótesis alterna es H_a: $\mu > 220$ (el cardiólogo piensa que el nivel promedio de colesterol es mayor de 220).
La ventana de diálogo **1-Sample Z** se completa como lo muestra la siguiente figura:

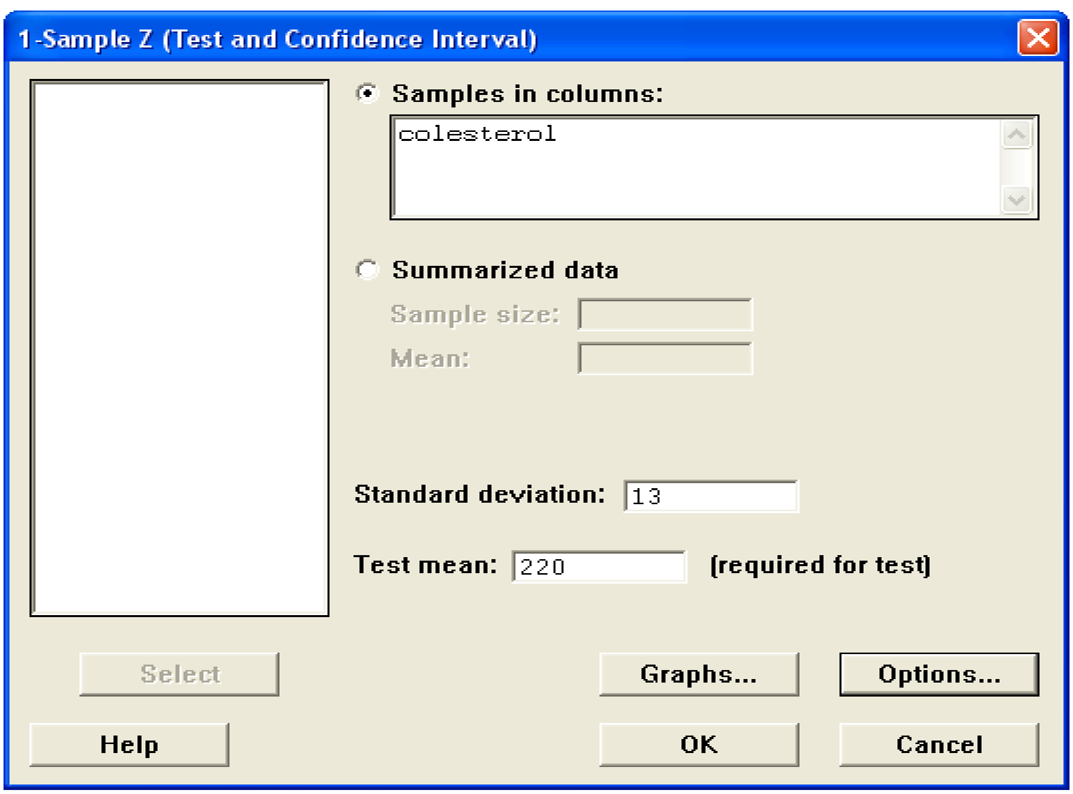
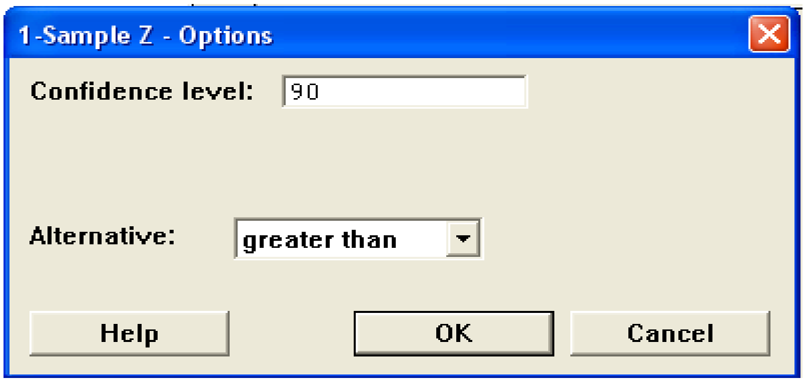


Figura 7.4. Ventana de diálogo de **1-sample Z** para el Ejemplo 7.3.

Luego se oprime el botón **Options** y en la ventanita de **alternative** se elige “greater than” como se muestra a continuación:



No importa lo que se escriba en **Confidence level**, porque **MINITAB** sólo hará la prueba de hipótesis. Si la hipótesis alterna es “<”, entonces se elige **“less than”**, y si la alterna es “ $\neq$” entonces se elige **“not equal”.**

Los resultados son los siguientes:

One-Sample Z: colesterol

```
Test of mu = 220 vs > 220
The assumed standard deviation = 13

                                                 90%
                                               Lower
Variable     N     Mean   StDev  SE Mean      Bound     Z      P
colesterol  20  225.900  13.094    2.907    222.175  2.03  0.021
```

Interpretación: *El valor del “P-value” (el área a la derecha de 2.03) es .021 menor que el nivel de significación α=.05, por lo tanto; se rechaza la hipótesis nula y se concluye de que si hay evidencia estadística de que el nivel de colesterol promedio de los pacientes con problemas cardíacos es mayor de 220. O sea los resultados apoyan lo que afirma el cardiólogo.*

Ejemplo 7.4 Un profesor de matemáticas piensa que los datos de la muestra del Ejemplo 7.2 sugieren que el puntaje promedio en la parte de aprovechamiento matemático ha disminuido desde 1980, ya que en ese año la media de todos los puntajes en aprovechamiento era de 700 pts. ¿A qué conclusión se llegará después de hacer una prueba de hipótesis? Considerando que la variabilidad de los puntajes no ha cambiado de 1980 a 1994.

Solución:

La hipótesis nula es H_0: $\mu = 700$ (el puntaje promedio en 1994 sigue siendo el mismo que en 1980) y la hipótesis alterna es H_a: $\mu < 700$ (el puntaje promedio disminuyó).

La ventana de diálogo **1-Sample Z** deberá ser completada como sigue:

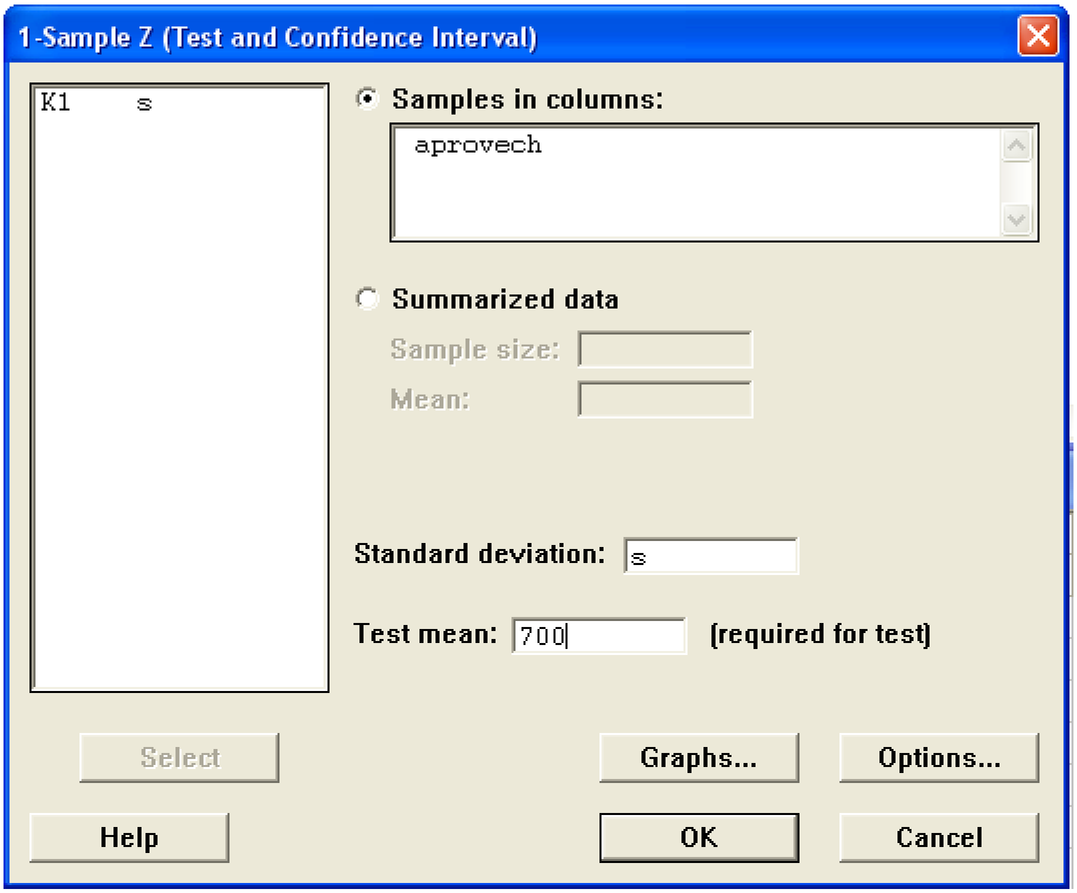


Figura 7.5. Ventana de diálogo de **1-sample Z** para el Ejemplo 7.4

Luego se oprime el botón **Options** y se elige **less than** en la ventanita de **Alternative**. Los resultados aparecerán en la ventana **session** de la siguiente manera:

One-Sample Z: aprovech

```
Test of mu = 700 vs < 700
The assumed standard deviation = 51.8617

                                                  90%
                                                Upper
Variable   N     Mean   StDev  SE Mean    Bound      Z      P
aprovech  40  673.100  51.862    8.200  683.609  -3.28  0.001
```

Interpretación: *El valor del "P-value" (el área a la izquierda de –3.28) es .001 menor que el nivel de significación α = .05, por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se concluye de que si hay evidencia estadística de que el puntaje promedio de la parte de aprovechamiento ha disminuído desde 1980.*

7.2 Inferencias acerca de la Media Poblacional (Varianza Desconocida)

Supongamos que la población es normal con media y varianza desconocida y que se desea hacer inferencias acerca de μ, basada en una muestra pequeña (n < 30) tomada de la población. En este caso la distribución de la media muestral $\bar{x}$ ya no es normal, sino que sigue la distribución ***t de Student.***

La distribución ***t de Student*** es bastante similar a la Normal Estándar, con la diferencia que se aproxima más lentamente al eje horizontal. El parámetro de esta distribución es llamado grados de libertad, y se puede notar que a medida que los grados de libertad aumentan, la curva de la ***t*** y la curva normal estándar se asemejan cada vez más. Los grados de libertad guardan relación con el número de datos que se usan para calcular el estadístico y el número de estimaciones de parámetros que aparecen en la misma. Por cada estimación de parámetro que aparece en la fórmula del estadístico se pierde un grado de libertad.

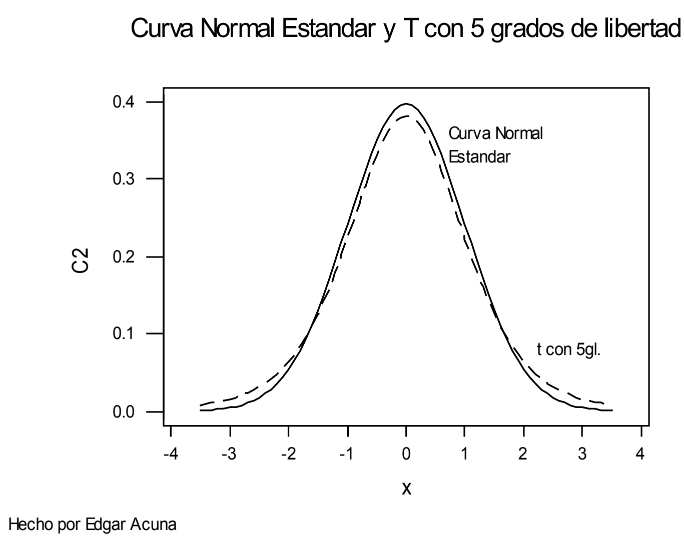


Figura 7.6. Relación entre la curva normal estándar y una curva t.

Propiedad: Si de una población Normal con media μ y desviación estándar σ se extrae una muestra de tamaño n, entonces el estadístico:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

se distribuye como una *t de Student* con n-1 grados de libertad. Esta expresión es la base para hacer inferencia estadística para la media de una población Normal cuando la varianza no es conocida.

Un intervalo de confianza del 100 (1-α) % para μ es de la forma:

$$(\bar{x} - t_{(n-1,\alpha/2)}\ s/\sqrt{n}\ ,\ \bar{x} + t_{(n-1,\alpha/2)}\ s/\sqrt{n}\ )$$

donde s es la desviación estándar muestral. Aquí $t_{(n-1,\alpha/2)}$ es un valor de t con n-1 grados de libertad y tal que el área a la derecha de dicho valor es $\alpha/2$.

También se pueden hacer las siguientes pruebas de hipótesis:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
$H_o: \mu=\mu_0$	$H_o: \mu=\mu_0$	$H_o: \mu=\mu_0$
$H_a: \mu<\mu_0$	$H_a: \mu\neq\mu_0$	$H_a: \mu>\mu_0$

Prueba Estadística

$$T=\frac{\bar{x}-\mu_o}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$ es una t con n-1 g.l.

Decisión

Si $T_{cal} < -t_\alpha$ entonces se rechaza H_o	Si $\lvert T_{cal}\rvert > t_{\alpha/2}$ entonces se rechaza H_o	Si $T_{cal} > t_\alpha$ entonces se rechaza H_o

En **MINITAB**, para hallar intervalos de confianza y hacer pruebas de hipótesis acerca de la media, cuando la varianza poblacional no es conocida, hay que seguir la secuencia **Stat ▸ Basic Statistics ▸ 1-sample t.**

Ejemplo 7.5 Los tiempos de sobrevivencia (en años) de 12 personas que se han sometido a un transplante de corazón son los siguientes:

3.1 .9 2.8 4.3 .6 1.4 5.8 9.9 6.3 10.4 0 11.5

Hallar un intervalo de confianza del 99 por ciento para el promedio de vida de todas las personas que se han sometido a un transplante de corazón.

Solución:
Asumiendo que la columna *Tiempo* contiene los datos, la ventana de diálogo ***1-sample t*** se completará como se muestra en la Figura 7.7. Notar que la ventana de diálogo es similar a la de 1-sample Z.

A continuación hay que oprimir el botón **Options** para entrar al nivel de confianza deseado en la ventanita **Confidence Level** como se muestra en la Figura 7.8.
Los siguientes resultados aparecerán en la ventana **session:**

One-Sample T: tiempo

```
Variable    N      Mean     StDev  SE Mean         99% CI
tiempo     12   4.75000  4.04599  1.16798   (1.12249, 8.37751)
```

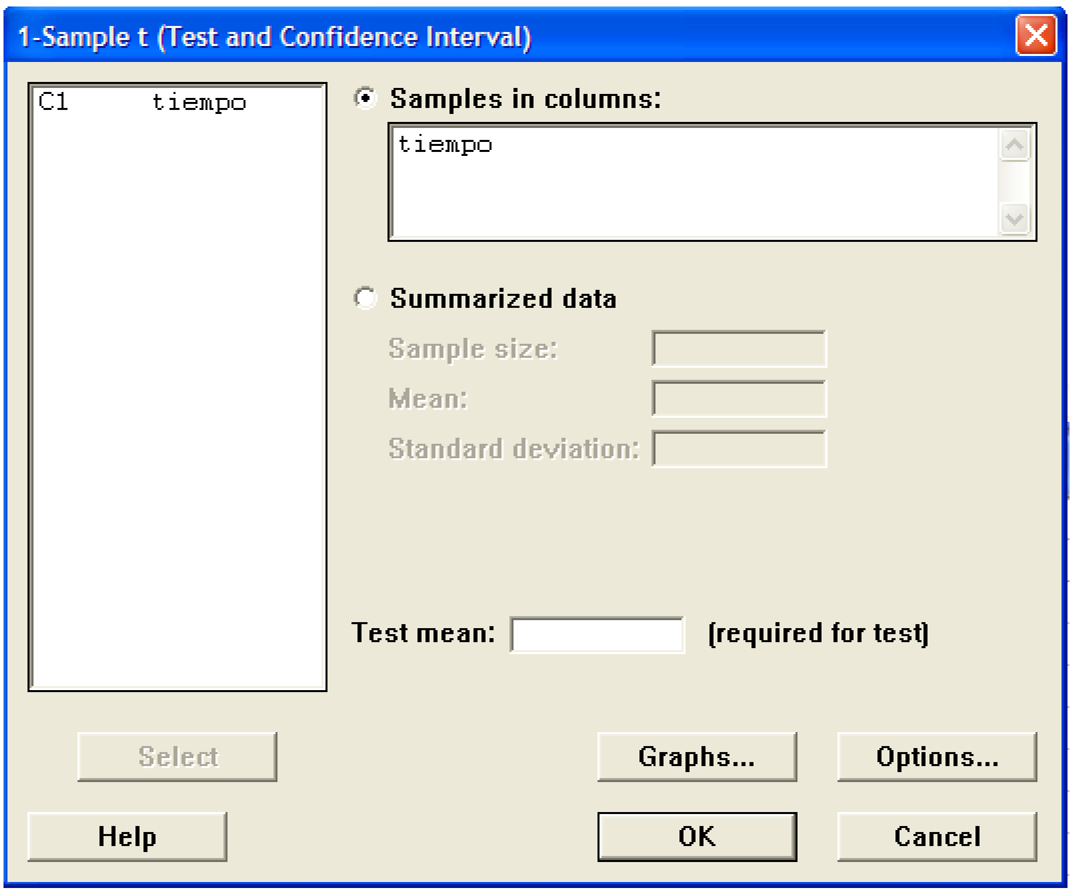


Figura 7.7. Ventana de diálogo de **1-sample t** para el Ejemplo 7.5.

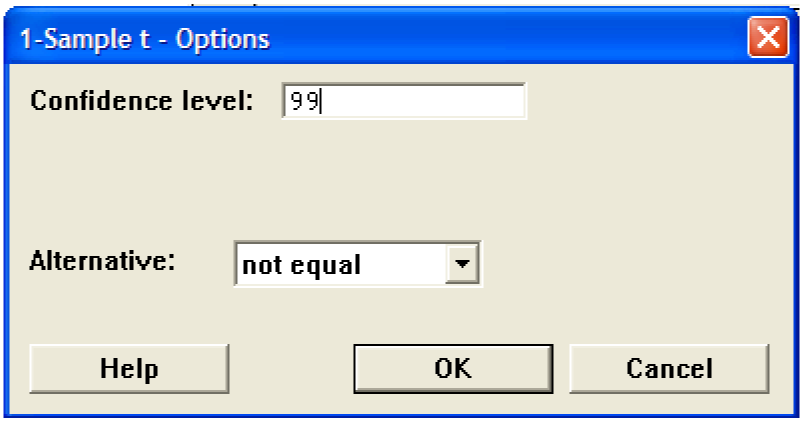


Figura 7.8. Ventana de diálogo de **Options** para **1-sample t.**

Ejemplo 7.6 Usando los datos del Ejemplo 7.5, un cardiocirujano afirma que el tiempo de vida promedio de los transplantes es mayor que 4 años. ¿A qué conclusión se llegará después de hacer la prueba de hipótesis?

Solución:
La hipótesis nula es H_0: $\mu = 4$ (el tiempo de vida promedio de todos los transplantes es 4 años) y la hipótesis alterna es H_a: $\mu > 4$ (el tiempo de vida promedio es mayor que 4 años).

La ventana de diálogo **1-sample t** se completará como se muestra en la Figura 7.9. Luego hay que oprimir el botón **Options** y elegir "greater than" en la ventanita **Alternative**.

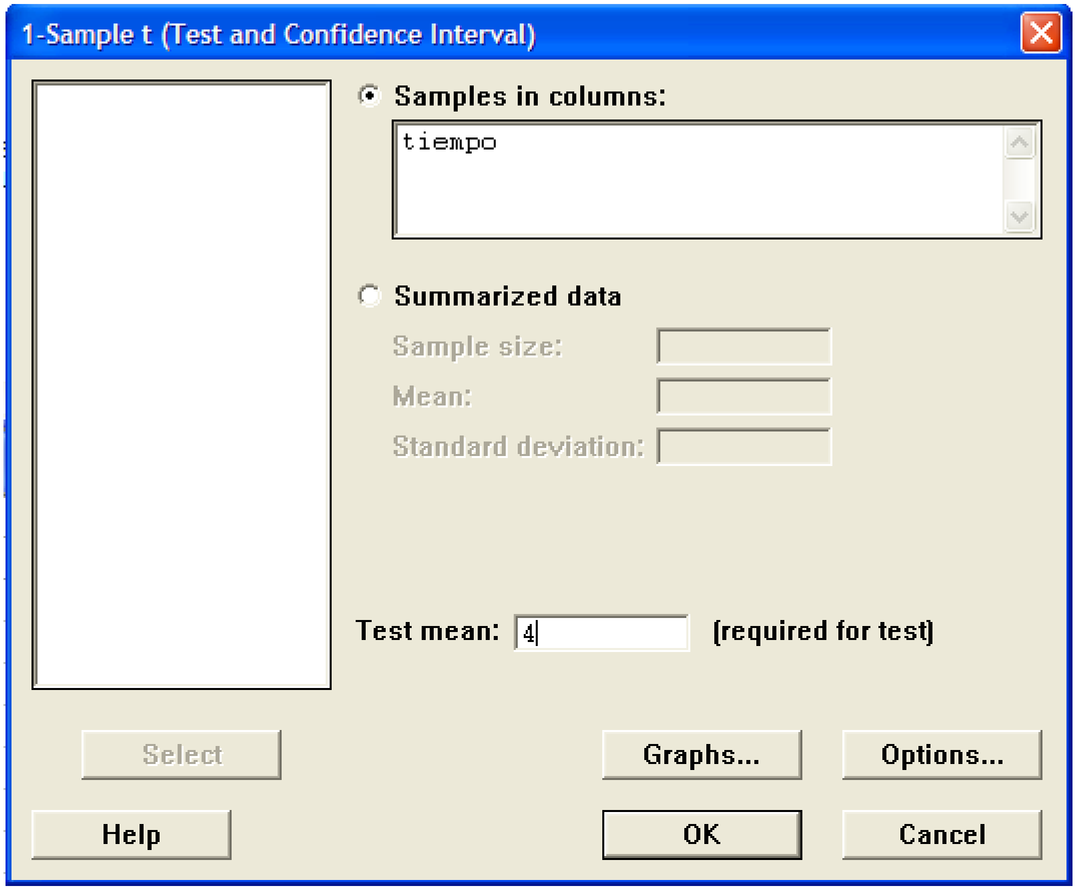


Figura 7.9. Ventana de diálogo de **1-sample t** para el Ejemplo 7.6.

Los siguientes resultados aparecerán en la ventana **session:**

One-Sample T: tiempo

```
Test of mu = 4 vs > 4
                                                99%
                                              Lower
Variable    N     Mean    StDev  SE Mean      Bound     T       P
tiempo     12  4.75000  4.04599  1.16798    1.57535  0.64   0.267
```

Interpretación: *El valor del "P-value" (el área a la derecha de 0.64) es .267 mayor que el nivel de significación* α *= .05, por lo tanto NO se rechaza la hipótesis nula y se concluye de que no hay evidencia de que el tiempo promedio de vida después del transplante haya aumentado de 4 años.*

7.3 Inferencia para Proporciones

Muchas veces estamos interesados en estimar la proporción *p* (o el porcentaje) de ocurrencia de un evento, por ejemplo el porcentaje de estudiantes que fuman en una universidad, el porcentaje de votantes que favorecen a un cierto candidato, etc. Para esto necesitamos definir una variable aleatoria X que indique el número de veces que ocurre el evento en una muestra de tamaño n y con probabilidad de éxito, p. Se puede mostrar que cuando el tamaño de muestra es grande, tal que $np > 5$, entonces el estadístico

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

se distribuye aproximadamente como una normal estándar. Aquí p representa la proporción poblacional que se desea estimar, y $\hat{p} = \frac{x}{n}$ es la proporción muestral. Cuando $\hat{p}$ es cercano a 0 ó a 1 se debe tomar un tamaño de muestra más grande para que la aproximación sea buena.

Un Intervalo de confianza aproximado del 100 (1-α) % para la proporción poblacional p será:

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

Las fórmulas para las pruebas de hipótesis serán como sigue:

Caso I	Caso II	Caso III
$H_o: p=p_0$	$H_o: p=p_0$	$H_o: p=p_0$
$H_a: p<p_0$	$H_a: p\neq p_0$	$H_a: p>p_0$

Prueba Estadistica (Aproximada):

$$Z = \frac{(p - p_0)}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Decisión

Si $Z_{cal} < -Z_\alpha$ entonces se rechaza H_o	Si $\lvert Z_{cal}\rvert > Z_{\alpha/2}$ entonces se rechaza H_o	Si $Z_{cal} > Z_\alpha$ entonces se rechaza H_o

Para hacer inferencias para proporciones en **MINITAB**, se sigue la secuencia **Stat** ▸ **Basic Statistics** ▸ **1 proportion**.

Ejemplo 7.7 En 1990 en un cierto país, se reportó que dos de cada 5 personas pensaban que debería incrementarse el poder nuclear. En una encuesta reciente hecha en 1996 a 1225 personas se encontró que 478 de ellos pensaban que se debería aumentar el poder nuclear. Hallar un intervalo de confianza del 90 por ciento para la proporción poblacional en 1996. ¿Piensa Ud. que hay evidencia de que la opinión de la gente en 1996 ha cambiado con respecto a 1990? Justificar su contestación.

Solución:
Hay que hallar un intervalo de confianza del 90% para la proporción *p*, y probar la siguiente hipótesis:

$H_0 : p = .4$ (la proporción no cambió de 1990 a 1996).
$H_a : p \neq .4$ (la proporción cambió de 1990 a 1996).

El intervalo de confianza y la prueba de hipótesis se pueden hallar simultáneamente. La ventana de diálogo se completará como sigue:

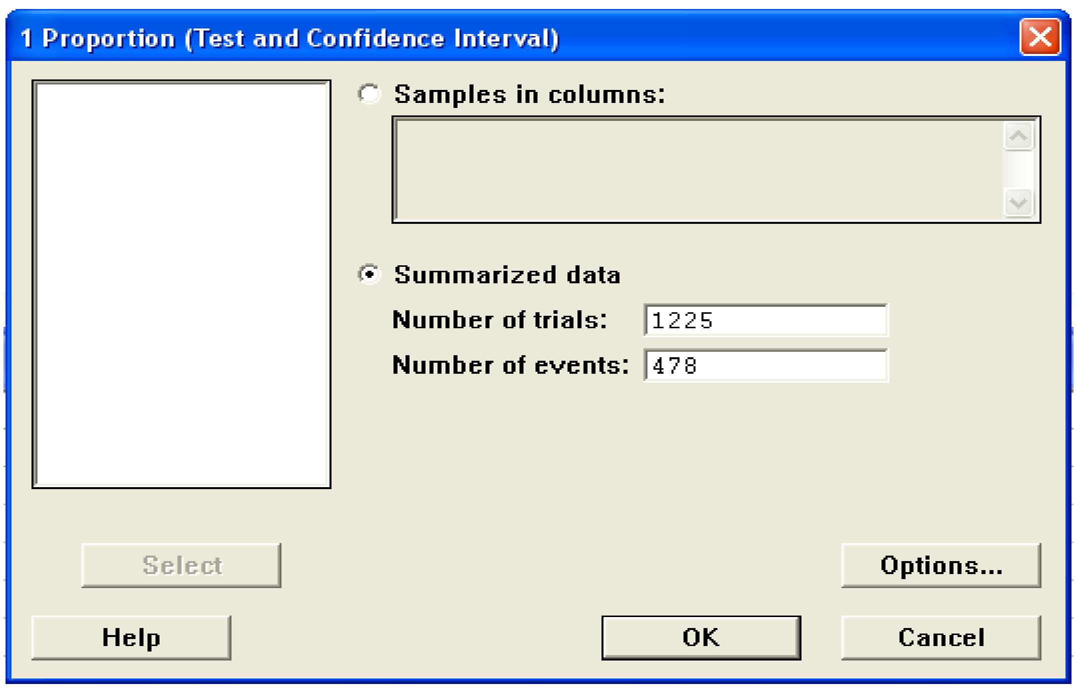


Figura 7.10. Ventana de diálogo de **1-proportion** para el Ejemplo 7.7.

Primero se elige la opción **Summarized Data**. La opción **Samples in columns** se usa cuando en una columna se entran las secuencias de éxitos y fracasos que realmente ocurren en la muestra**.** Luego en la ventanita **Number of Trials**, se entra el tamaño de la muestra y en la ventanita **Number of successes** se entra el número de éxitos. Después se oprime el botón **Options** y se completa la ventana de diálogo que aparece en la Figura 7.11.

Notar que se marca la opción **Use test and interval based on normal distribution**, porque estamos usando la prueba estadística aproximada por la normal.

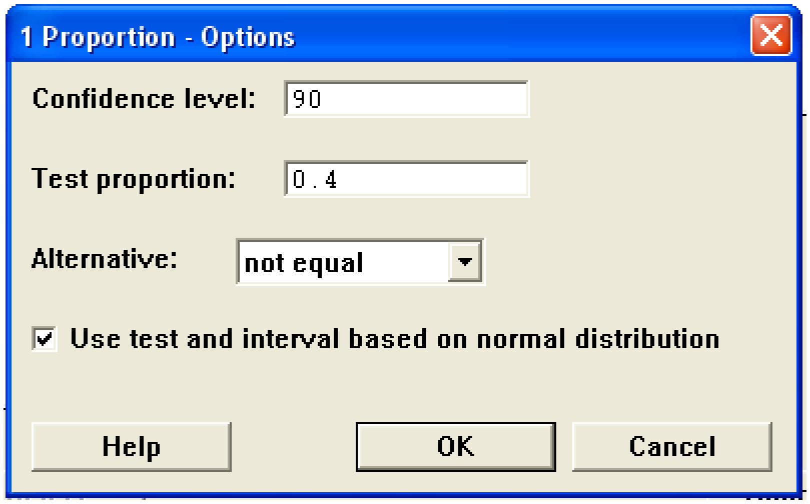


Figura 7.11. Ventana de diálogo que aparece al oprimir **options** en **1-proportion.**

Los siguientes resultados aparecen en la ventana **session:**

Test and CI for One Proportion

```
Test of p = 0.4 vs p not = 0.4

Sample          X        N      Sample p          90% CI              Z-Value    P-
Value
1         478      1225   0.390204     (0.367280, 0.413128)     -0.70     0.484
```

Interpretación: *Viendo que el "p-value" es .484 mucho mayor que .05 se llega a la conclusión de que no hay suficiente evidencia para concluir que la proporción de personas a favor de un incremento del poder nuclear haya cambiado de 1990 a 1996.*

Nota: *Si en una columna se introduce los éxitos y fracasos entonces,* MINITAB *identifica el éxito (SUCCESS) y fracaso (FAILURE) según el orden alfabético, o sea fracaso es el valor de la variable que empieza con una letra que aparece antes en el alfabeto.*

Ejemplo 7.8. El director de un hospital afirma que el 25 por ciento de los nacimientos que ocurren allí son por cesárea. Un médico que trabaja en dicho hospital piensa que ese porcentaje es mayor. Para probar su afirmación recolecta información de los 25 nacimientos ocurridos durante una semana. Los datos son como siguen:

Partos

Cesárea	normal	cesárea	normal	normal	normal
normal	cesárea	normal	cesárea	normal	cesárea
normal	normal	normal	normal	normal	cesárea
normal	normal	cesárea	normal	normal	cesárea
normal					

¿Habrá suficiente evidencia estadística para apoyar la afirmación del médico?

Solución:

En este caso los datos son entrados en una columna llamada *partos,* en consecuencia se usará la opción **samples in columns** en la ventana **1-proportion.** En este ejemplo, éxito será que el parto sea normal y fracaso, que el parto sea por cesárea pues C está antes que *N*. Luego las hipótesis deben ser planteadas así:

Ho: p =.75 (el 75% de los partos son normales y el 25% por cesárea)
Ha: p <.75 (menos del 75% de los partos son normales, o sea, más del 25% son por cesárea). La ventana de diálogo se completa como sigue:

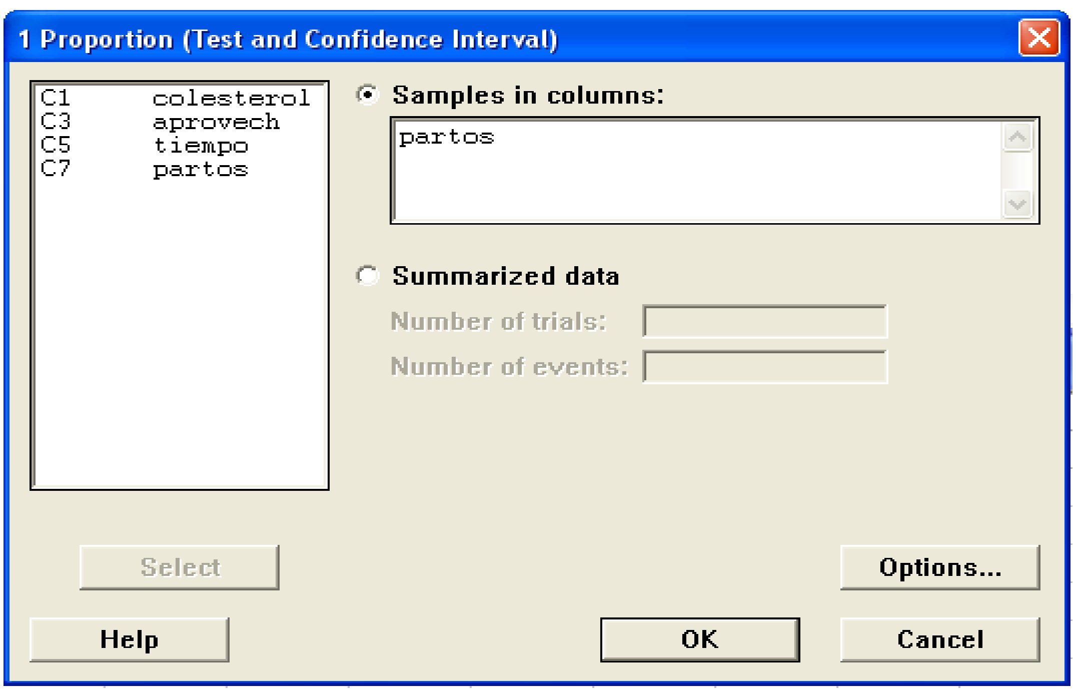


Figura 7.12. Ventana de diálogo de **1 proportion** para el Ejemplo 7.8.

El contenido de la ventana **session** será:

```
Test and Confidence Interval for One Proportion

Test of p = 0.75 vs p < 0.75

Success = normal

Variable          X      N  Sample p         95.0 % CI        Z-Value  P-Value
partos           17     25  0.680000  (0.497145, 0.862855)    -0.81    0.209
```

Interpretación: *De acuerdo al "P-value" = 0.209 > .05 no se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, no hay evidencia suficiente para concluir que lo que afirma el médico es correcto.*

7.4 Inferencia acerca de la Varianza Poblacional.

Para hacer inferencia acerca de la varianza de una población Normal se requiere hacer uso de la distibución Ji-Cuadrado, la cuál será explicada brevemente antes de discutir la inferencia.

7.4.1. La Distribución Ji-Cuadrado

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ observaciones de una muestra de tamaño n de una población normal $N(\mu, \sigma^2)$. Entonces:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

se distribuye como una Ji-Cuadrado (χ^2) con n-1 grados de libertad. La distribución Ji-Cuadrado no es simétrica, pero a medida que los grados de libertad aumentan se va observando más simetría. En la Figura 7.13 se muestra la gráfica de una χ^2 con 9 grados de libertad.

Se puede mostrar que el cuadrado de una normal estandarizada es una Ji-Cuadrado con un grado de libertad y que si se suman dos variables Ji-Cuadrado independientemente distribuidas, entonces se obtiene otra Ji-Cuadrado cuyos grados de libertad es igual a la suma de los grados de libertad de los otros dos.

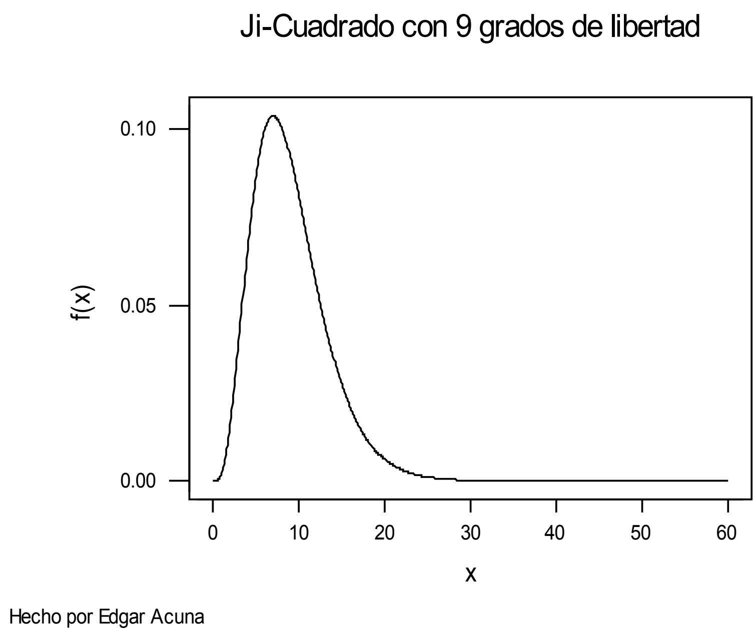


Figura 7.13 Gráfica de una Ji-Cuadrado con 9 grados de libertad

Recordando que la fórmula de la varianza muestral es $s^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$, se obtiene que:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Se acostumbra usar la notación $\chi^2_{(m)}$ para representar a una distribución Ji-Cuadrado con *m* grados de libertad.

Usos de la Ji-Cuadrado

a) Para hacer inferencias acerca de la varianza poblacional. Es decir, para calcular Intervalos de Confianza y Prueba de hipótesis para la varianza poblacional.

b) Para hacer pruebas de Bondad de Ajuste. O sea, para probar si un conjunto de datos sigue una distribución pre-determinada.

c) Para hacer análisis de tablas de contigencia.

En este capítulo sólo se discutirá el primer uso, los otros dos se discutirán en el Capítulo 8.

7.4.2 Intervalos de Confianza para la Varianza Poblacional

Partiendo de la siguiente relación, la cual puede ser fácilmente entendida con una gráfica:

$$P(\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1\text{-}\alpha$$

Donde $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ representan los valores de una Ji-Cuadrado con n-1 grados de libertad, de tal manera que el área a la izquierda de dichos valores son $\alpha/2$ y 1 - $\alpha/2$ respectivamente. Se puede llegar a establecer que un intervalo de confianza del 100 (1-α) % para la varianza poblacional σ^2 de una población normal es de la forma:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right)$$

MINITAB no tiene un comando u opción para calcular un intervalo de confianza para la varianza, así que hay que calcular la fórmula usando las opciones ***Calculator*** y ***Probability Distributions*** del menú **Calc.**

Ejemplo 7.9 Los siguientes datos representan espesor de la membrana del plasma (medido en angstroms) de 20 especies de una planta:

80	90	85	82	75	58	70	84	87	81	87
	61	73	84	85	70	78	95	77	52	

Hallar un intervalo de confianza del 95 % para la varianza poblacional.

Solución:
En este caso n = 20 y α = .05. Luego el intervalo de confianza del 95 % para σ^2 será de la forma:

$$\left(\frac{19s^2}{\chi^2_{.975}}, \frac{19s^2}{\chi^2_{.025}}\right)$$

En **MINITAB**, la varianza muestral s^2 puede ser calculada usando la secuencia opción **STAT ▸ Basic Statistics ▸ Store Descriptive Statistics,** y luego eligiendo **Variance** en la opción **Statistics.** Esto da S^2 = 122.116.

Los percentiles $\chi^2_{.975}$ y $\chi^2_{.025}$ de la Ji- Cuadrado con 19 grados de libertad pueden ser calculados usando **Chi-Square** de la opción **Probability Distributions** del menú **CALC**, como lo muestra la siguiente Figura 7.14.

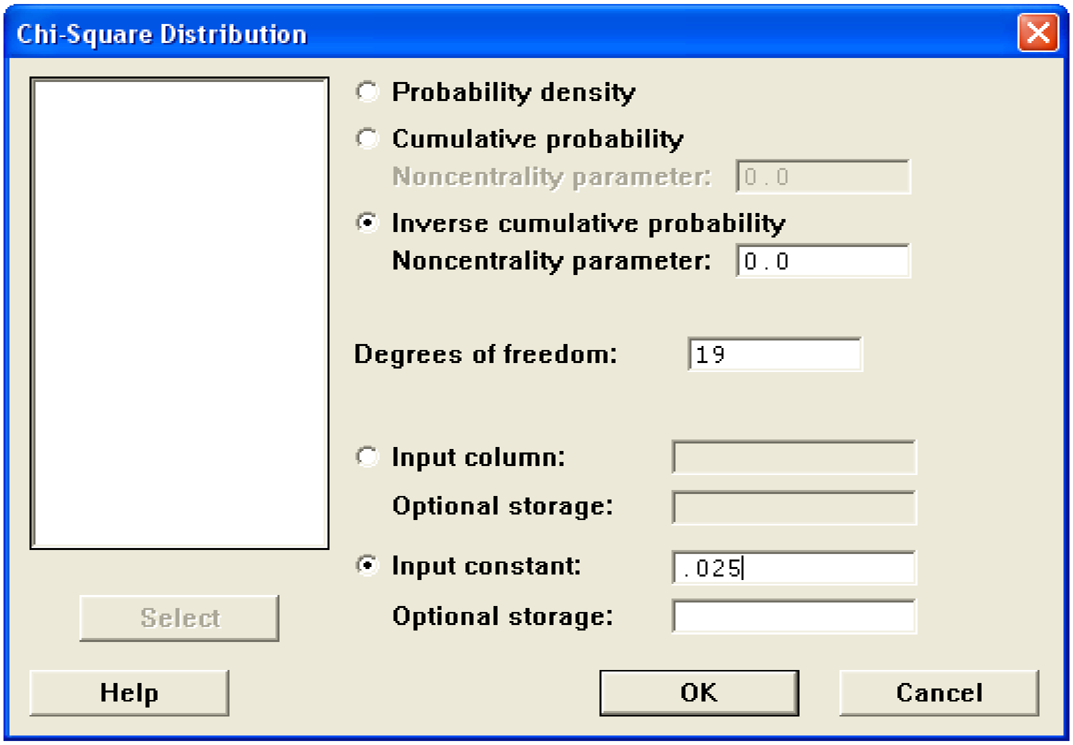


Figura 7.14. Ventana de diálogo para calcular percentiles de una Ji-Cuadrado.

Esto produce los siguientes resultados:

Inverse Cumulative Distribution Function

```
Chi-Square with 19 DF

P( X <= x )        x
      0.025  8.90652
```

O sea, $\chi^2_{.025}$ = 8.9065 y similarmente $\chi^2_{.975}$ = 32.8523. Luego, el intervalo de confianza del 95 % para la varianza poblacional será (70.6253, 260.507).

Por otro lado, tomando en cuenta que la desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza, se puede usar la fórmula anterior para hallar un intervalo de confianza para la desviación estándar poblacional σ.

O sea, el intervalo de confianza del 100(1-α)% para la desviación estándar poblacional será:

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}}\right)$$

MINITAB da este intervalo de confianza cuando siguiendo la secuencia **STAT** ▸ **Basic Statistics** ▸ ***Graphical Summary.***

Para los datos del ejemplo se obtienen los resultados que aparecen en la siguiente Figura:

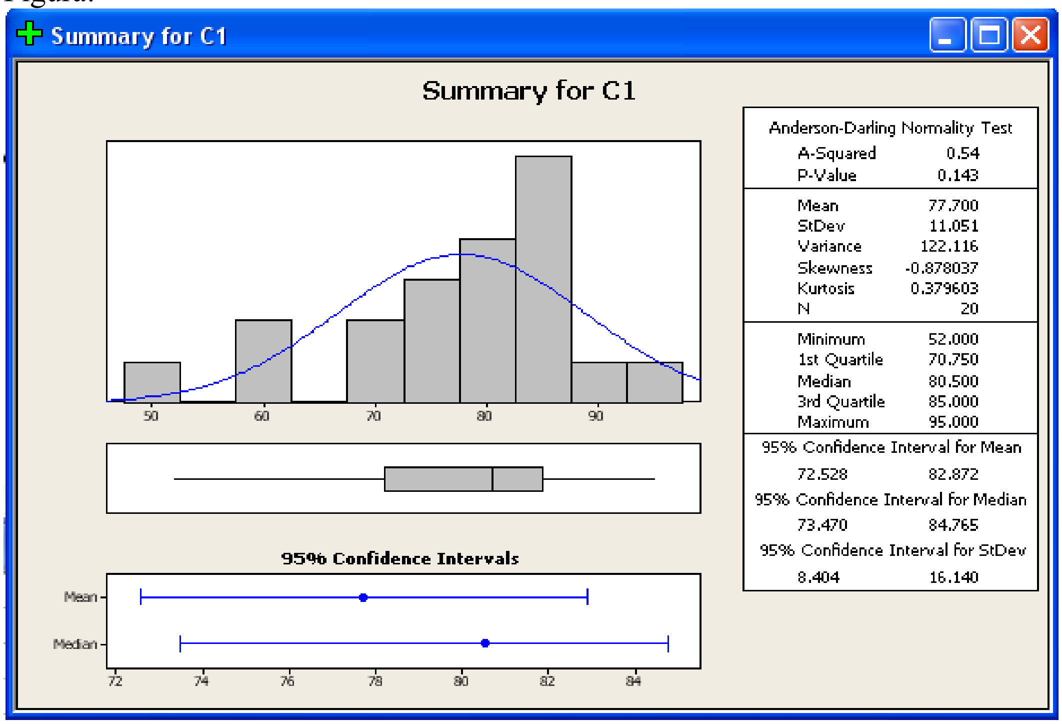


Figura 7.15. Resultados de **Graphical Summary** para el Ejemplo 7.9

Interpretación: *Un intervalo de confianza del 95% para* σ *es (8.4039, 16.1402). Si se cuadra ambos valores se obtiene el intervalo de confianza para la varianza, y se concluye de que hay un 95% de confianza de que la varianza del espesor de la membrana del plasma de todas las especies caen entre 70.6253 y 260.507.*

7.4.3 Prueba de Hipótesis para la Varianza Poblacional

Asumiendo que la población de donde se extrae la muestra se distribuye normalmente se pueden hacer las siguientes hipótesis acerca de la varianza poblacional:

Caso I	Caso II	Caso III
$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Prueba Estadística:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad \text{con n-1 g.l.}$$

Decisión:

Si $\chi^2_{cal} < \chi^2_{\alpha}$ entonces se rechaza H$_o$	Si $\chi^2_{cal} < \chi^2_{\alpha/2}$ ó $\chi^2_{cal} > \chi^2_{1-\alpha/2}$ se rechaza H$_o$	Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{1-\alpha}$ se rechaza H$_o$

Tampoco existe un comando para hacer esta prueba de hipótesis en **MINITAB**.

Ejemplo 7.10 Usando los datos del ejemplo anterior, probar si hay suficiente evidencia para concluir que la varianza poblacional sea mayor que 100. Usar un nivel de significación del 5 por ciento.

Solución:

Se desea probar:

$H_o : \sigma^2 = 100$

$H_a : \sigma^2 > 100$

El valor de la prueba estadística será (19)(122.116)/100 = 23.2020 que comparado con $\chi^2_{.95}$ = 30.1435 resulta ser menor. Luego, no hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. Al 5 % de significación, la varianza poblacional no parece ser mayor que 100.

7.5 Comparando la varianza de dos poblaciones

Supongamos que se tienen dos poblaciones normales con varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2. Si de la primera población se toma una muestra de tamaño *m* que tiene una varianza muestral s_1^2 y de la segunda poblacion se toma una muestra, independiente de la primera, de tamaño *n* que tiene una varianza muestral s_2^2, se puede mostrar que la razón $\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ se distribuye como una F con *m*-1 grados de libertad en el numerador y *n*-1 en el denominador. Esta es la base para la prueba de F de igualdad de varianza entre dos grupos Las fórmulas para las pruebas de hipótesis son como sigue:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Prueba Estadística:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$ con m-1 g.l. en el numerador y n-1 g.l en el denominador

Decisión:

Si $F_{cal} < F_{\alpha}$ entonces se rechaza H_o	Si $F_{cal} < F_{\alpha/2}$ o $F_{cal} > F_{1-\alpha/2}$ se rechaza H_o	Si $F_{cal} > F_{1-\alpha}$ se rechaza H_o

MINITAB hace pruebas de igualdad de varianza de dos o más grupos. Para esto se selecciona la opción **2 Variances** del submenú **Basic Statistics** del menú **STAT.** Otra posibilidad es elegir **Test for Equal Variances** del submenú **ANOVA** del menú **STAT.**

Ejemplo 7.11 En el siguiente ejemplo se trata de comparar las varianzas de los puntajes de aprovechamiento de los estudiantes de escuelas públicas y privadas. Los datos recolectados son:

Est	aprovech	escuela
1	580	pública
2	638	pública
3	642	privada
4	704	pública
5	767	privada
6	641	privada
7	721	privada
8	625	privada
9	694	pública
10	615	pública
11	617	pública
12	623	pública
13	689	privada
14	689	pública

Solución:

Las hipótesis son las siguientes:

H_o: Varianza de los puntajes de estudiantes de escuela pública es igual a la varianza de puntajes de los estudiantes provenientes de escuela privada.

H_a: Las varianzas no son iguales.

La ventana de diálogo de **2 Variances** se completará como lo muestra la Figura 7.16. Oprimiendo el botón **Options** se puede elegir el nivel de confianza y poner un título a la gráfica que aparecerá:

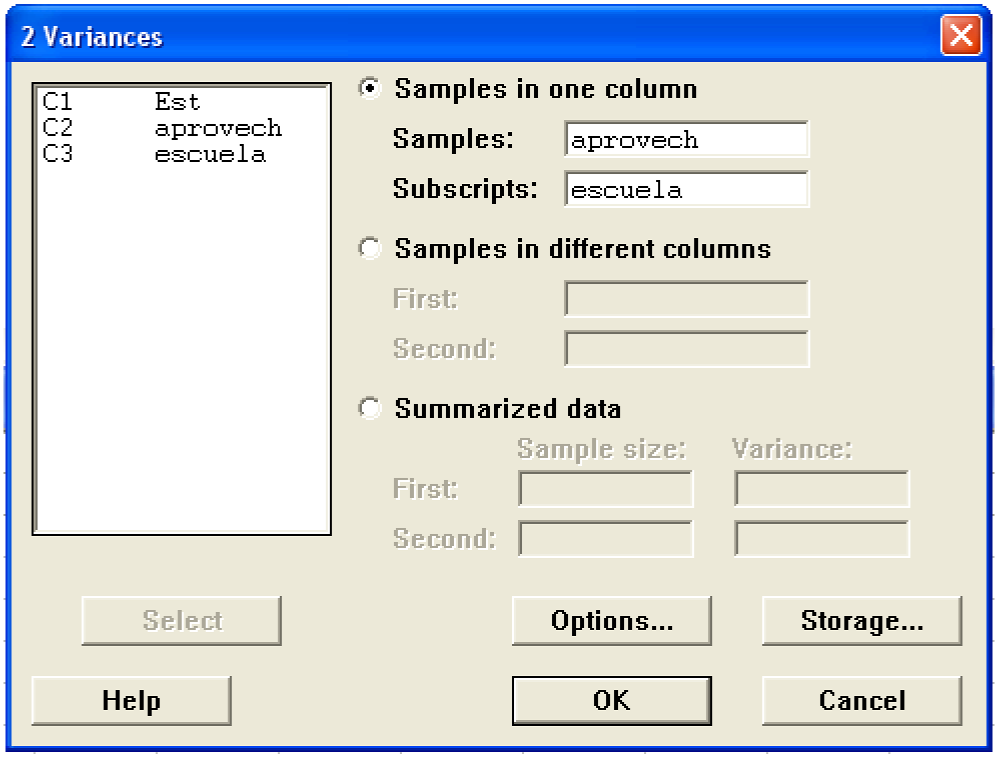


Figura 7.16. Ventana de diálogo de **2 variances** para el Ejemplo 7.11.

La ventana **session** mostrará los siguientes resultados:

Test for Equal Variances: aprovech versus escuela

```
95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

escuela  N    Lower    StDev    Upper
privada  6  32.4522  55.3477  158.347
pública  8  28.2368  45.1347  103.380

F-Test (normal distribution)
Test statistic = 1.50, p-value = 0.601

Levene's Test (any continuous distribution)
Test statistic = 0.30, p-value = 0.594
```

Además aparece una gráfica mostrando los intervalos de confianza para cada una de las desviaciones estándar y una comparación de la variabilidad de cada muestra, como aparece en la Figura 7.17.

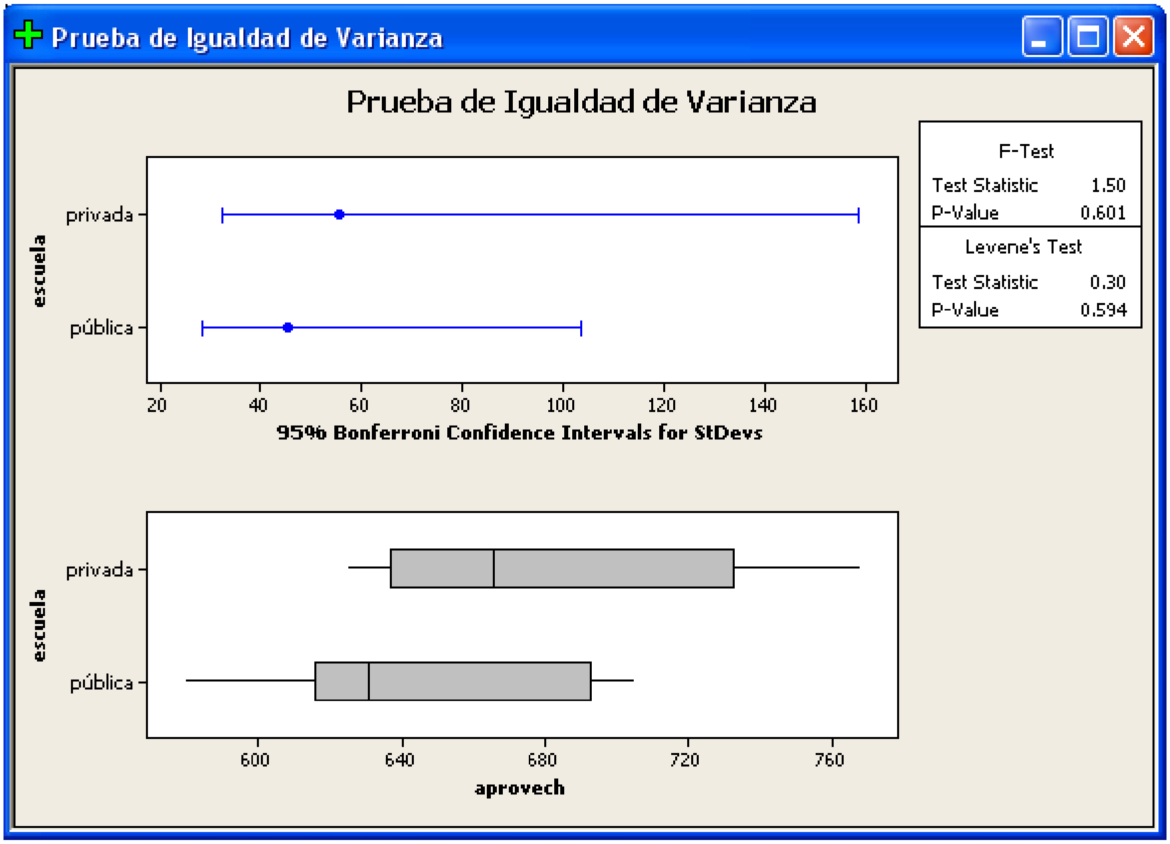


Figura 7.17. Intervalos de confianza y boxplots para comparar las varianzas.

Interpretación: *El "P-value" de la prueba de F es .601 mucho mayor que .05, luego se acepta la hipótesis nula y se concluye que los puntajes en la prueba de aprovechamiento en las escuelas pública y privada tienen igual varianza. De las gráficas se puede ver que los "boxplots" de ambos grupos tienen aproximadamente el mismo alargamiento.*

Ejemplo 7.12. Comparar la varianza de los promedios académicos de estudiantes hombres y mujeres matriculados en una clase básica de Estadística. Los datos están en el archivo **gpasex,** en la página de internet del texto.

Solución:
Los datos están guardados en dos columnas una llamada *hombres* y la otra *mujeres*. Eligiendo la secuencia **Stat** ▸ **Basic Statistics** ▸ **2 variances** se obtiene una ventana de diálogo la cual se completa como aparece en la Figura 7.18.

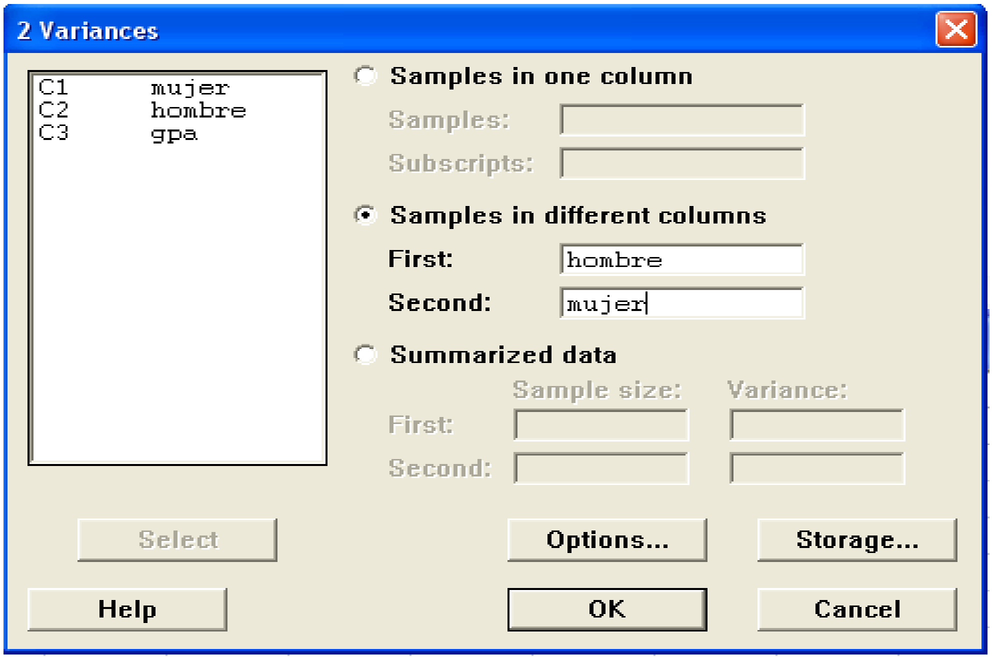


Figura 7.18. Ventana de diálogo de **2 Variances** para el Ejemplo 7.12

Los resultados que se obtienen son como sigue:

Test for Equal Variances: hombre, mujer

```
95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

         N     Lower     StDev     Upper
hombre  12  0.427001  0.631455  1.16725
 mujer  16  0.254628  0.359156  0.59546

F-Test (normal distribution)
Test statistic = 3.09, p-value = 0.045

Levene's Test (any continuous distribution)
Test statistic = 6.16, p-value = 0.020
```

Además aparece el análisis gráfico mostrado en la Figura 7.19.

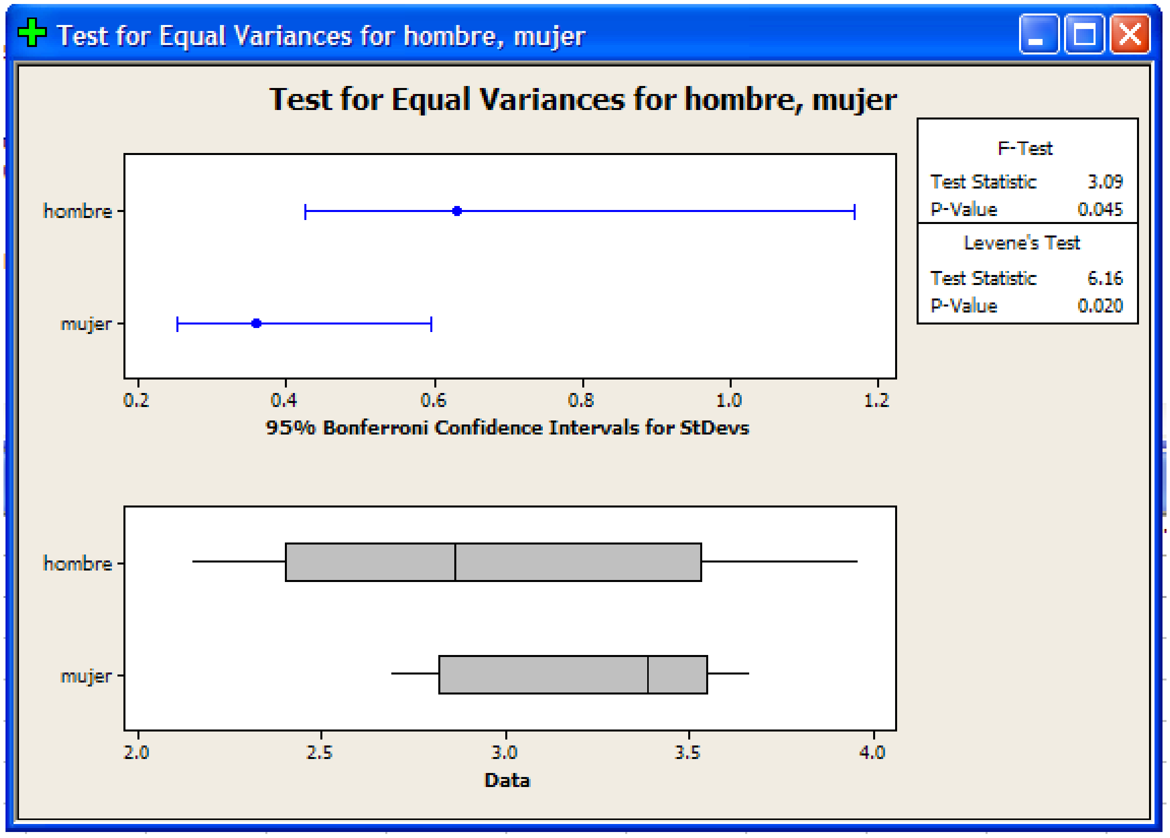


Figura 7.19. Intervalos de confianza y boxplots para comparar las varianzas del Ejemplo 7.12

Interpretación: *Como el "p-value" de la prueba de F es 0.045 menor que 0.05 se rechaza la hipótesis nula de igualdad de varianza, y se concluye que las varianza de los promedios académicos de los hombres y las mujeres no son iguales. De las gráficas se pueden ver que la distribución de los promedios académicos de las mujeres es menos variable que la de los hombres.*

7.6 Comparación entre dos medias poblacionales usando muestras independientes

Supongamos que se tienen dos poblaciones distribuídas normalmente con medias desconocidas μ_1 y μ_2, respectivamente. Se puede aplicar una prueba *t de Student* para comparar las medias de dichas poblaciones basándonos en dos muestras independientes tomadas de ellas. La primera muestra es de tamaño *m*, con media $\bar{x}$ y varianza s_1^2 y la segunda muestra es de tamaño *n*, tiene media $\bar{y}$ y varianza s_2^2.

Si las varianzas de las poblaciones son iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) entonces se puede mostrar que:

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

se distribuye como una t con $m + n - 2$ grados de libertad. En este caso la varianza poblacional σ^2 es estimada por una varianza combinada de las varianzas de las dos muestras tomadas, dada por la siguiente fórmula:

$$s_p^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m + n - 2}$$

Un intervalo de confianza del 100(1-α) % para la diferencia μ_1-μ_2 de las medias poblacionales será de la forma:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{(\alpha/2, n+m-2)} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

Las fórmulas para las pruebas de hipótesis son las siguientes:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
$H_o: \mu_1 = \mu_2$	$H_o: \mu_1 = \mu_2$	$H_o: \mu_1 = \mu_2$
$H_a: \mu_1 < \mu_2$	$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_a: \mu_1 > \mu_2$

Prueba Estadística:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$ con m+n-2 grados de libertad

Decisión:

Si $t_{cal} < -t_\alpha$ entonces se rechaza H_o	Si $t_{cal} < t_{\alpha/2}$ o $t_{cal} > t_{1-\alpha/2}$ se rechaza H_o	Si $t_{cal} > t_{1-\alpha}$ se rechaza H_o

Las fórmulas se pueden generalizar para probar hipótesis de las diferencias de las dos medias es una cantidad especificada D_o. En **MINITAB**, para hallar intervalos de confianza de diferencia de dos medias poblacionales y hacer prueba de hipótesis para comparar dos grupos se sigue la secuencia **STAT ▸ 2-sample t.**

Ejemplo 7.13. Se desea comparar si los estudiantes de escuelas privadas y públicas tienen igual rendimiento en la prueba de aprovechamiento matemático del College Board. Los datos aparecen en el Ejemplo 7.11.

Solución:
En el Ejemplo 7.11 se concluyó usando la prueba de F que que había igualdad de varianzas de las poblaciones de donde provenían las muestras. Luego la ventana de diálogo **2 sample *t*** se completa como se muestra en la Figura 7.20.

Notar que aparece seleccionada la opción **samples in one column** porque los datos de las dos muestras van en una misma columna (*aprovech*), y en otra columna (*escuela*) van los valores que permiten identificar a qué muestra pertenece el dato. La opción **Samples in different columns** se usa cuando las dos muestras están en columnas separadas. Notar además que la opción **Assume equal variances** aparece marcada.

Al oprimir el botón **Options** se puede elegir el nivel de confianza, el valor de la hipótesis que se quiere probar y la dirección de la hipótesis alterna tal como se muestra en la Figura 7.21

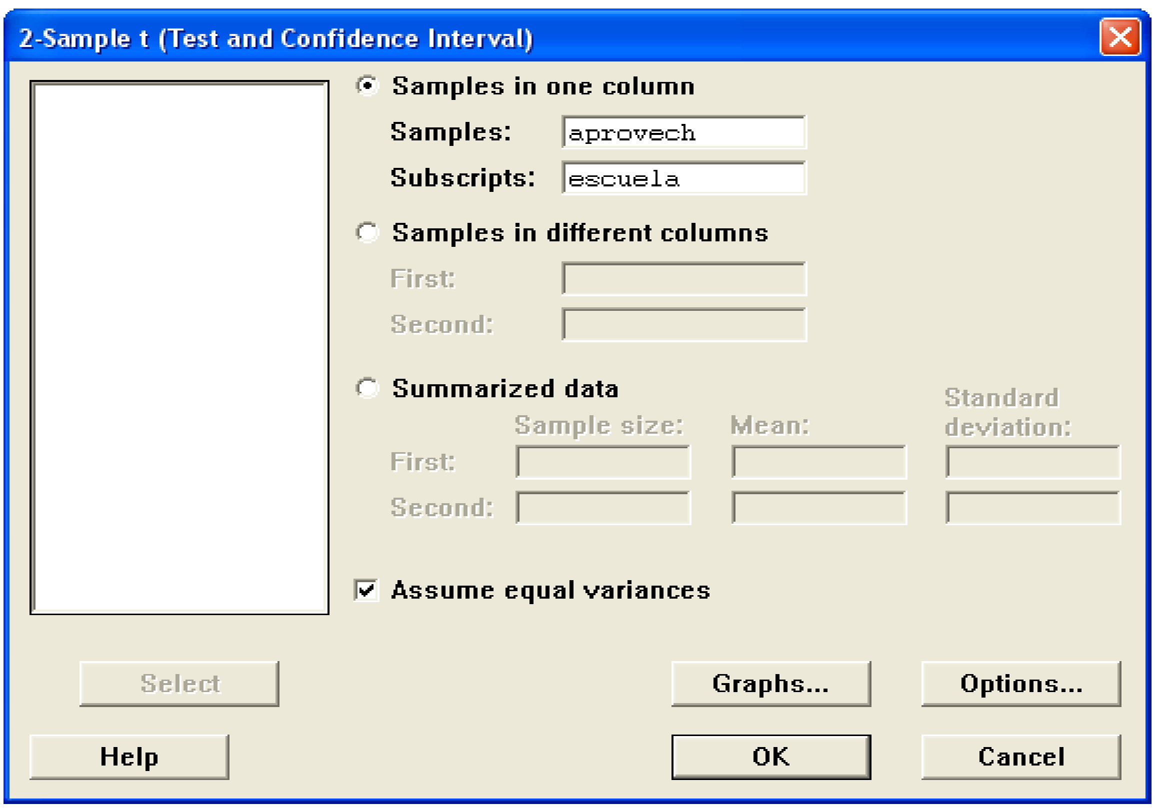


Figura 7.20. Ventana de diálogo de **2-sample t** para el Ejemplo 7.13.

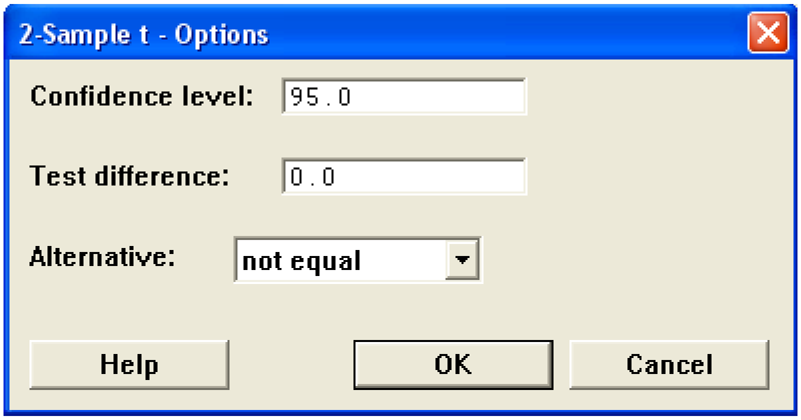


Figura 7.21. Ventana de diálogo de **Options** para **2-sample t.**

Los siguientes resultados aparecerán en la ventana **session:**

Two-Sample T-Test and CI: aprovech, escuela

```
Two-sample T for aprovech
                                       SE
escuela  N   Mean  StDev  Mean
privada  6  680.8   55.3    23
pública  8  645.0   45.1    16

Difference = mu (privada) - mu (pública)
Estimate for difference:  35.8333
95% CI for difference:  (-22.5849, 94.2516)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = 1.34  P-Value = 0.206  DF = 12
Both use Pooled StDev = 49.6461
```

Interpretación: *El valor del "P-value" es .206 mayor que el nivel de significación* α = *.05, por lo tanto NO se rechaza la hipótesis nula y se concluye de que no hay evidencia de que los estudiantes de escuela pública tengan un rendimiento distinto que los de escuela privada en las pruebas de aprovechamiento. El número de grados de libertad de la t es 12. Notar que el intervalo de confianza del 95% para la diferencia es (–22.6, 94.3) que contiene a cero, ésta es otra manera de justificar que se acepta la hipótesis nula.*

Eligiendo la opción **Graphs** de la ventana de diálogo **2-Sample t** se obtiene los boxplots de los dos grupos, como aparece en la siguiente figura:

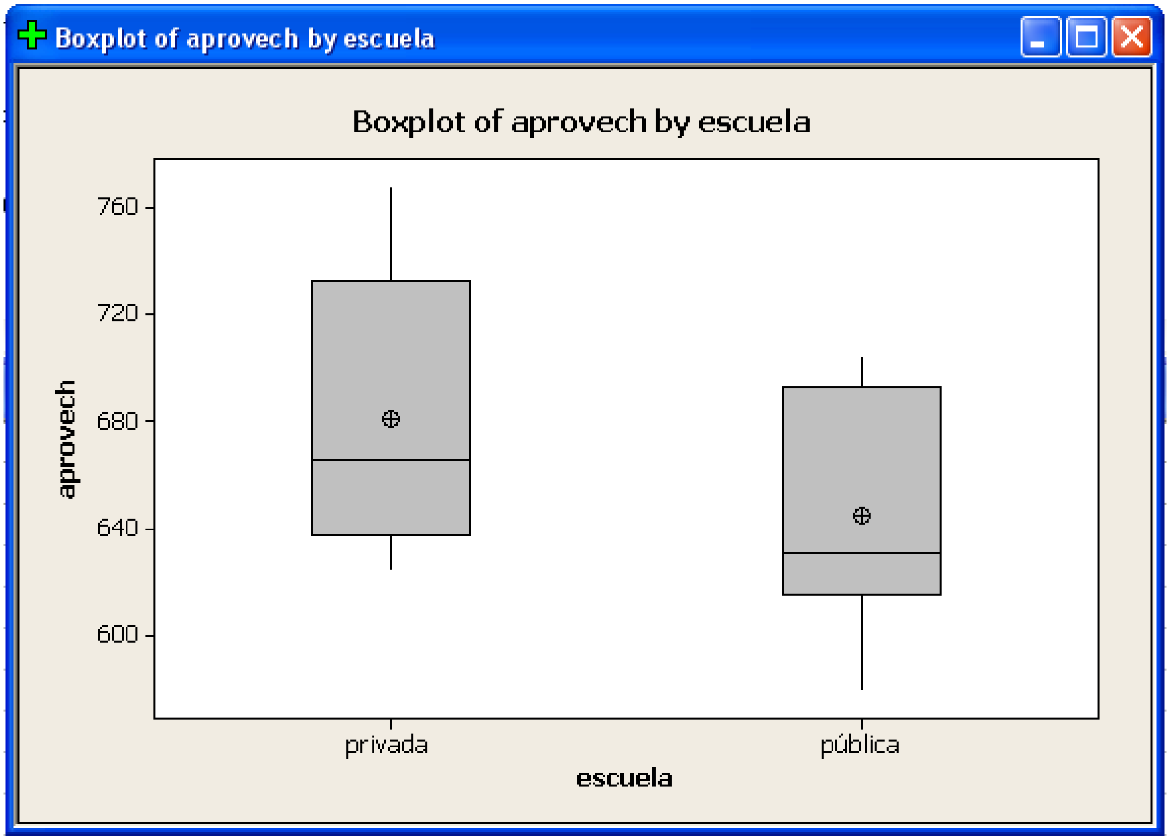


Figura 7.22. Comparación de dos grupos usando boxplots.

Interpretación: *No se puede apreciar una marcada diferencia entre las medianas (representadas por las lineas dentro de las cajas), ni las medias (representadas por los puntos) de los grupos. La variabilidad de los dos grupos también es bastante similar ya que los dos "boxplots" tienen alargamiento similar.*

Si las varianzas de las poblaciones no son iguales, entonces se usa una prueba aproximada de t, donde el número de grados de libertad es calculado aproximadamente.

La prueba de t aproximada está dada por:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}}$$

donde los grados de libertad gl son aproximados por la siguiente fórmula:

$$gl = \frac{(c_1 + c_2)^2}{\frac{c_1^2}{m-1} + \frac{c_2^2}{n-1}}$$

con $c_1 = \frac{s_1^2}{m}$ y $c_2 = \frac{s_2^2}{n}$.

Ejemplo 7.14. Usando los datos del Ejemplo 7.12, probar si las estudiantes mujeres tienen mejor promedio académico que los varones.

Solución:
En este caso los datos de cada muestra están en dos grupos separados y ya se mostró en el Ejemplo 7.12 que ellos no tienen igual varianza. La ventana de diálogo se muestra en la Figura 7.23. Notar que no se ha seleccionado la opción **Assume equal variances**. Luego se oprime el botón **Options** y se elige ***"greater than"*** en la ventanita **Alternative**.

Los resultados que aparecen en la ventana **session** serán:

Two-Sample T-Test and CI: hombre, mujer

```
Two-sample T for hombre vs mujer

         N   Mean  StDev  SE Mean
hombre  12  2.954  0.631     0.18
mujer   16  3.249  0.359    0.090

Difference = mu (hombre) - mu (mujer)
Estimate for difference:  -0.295208
95% CI for difference:  (-0.725972, 0.135555)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -1.45  P-Value = 0.166  DF = 16
```

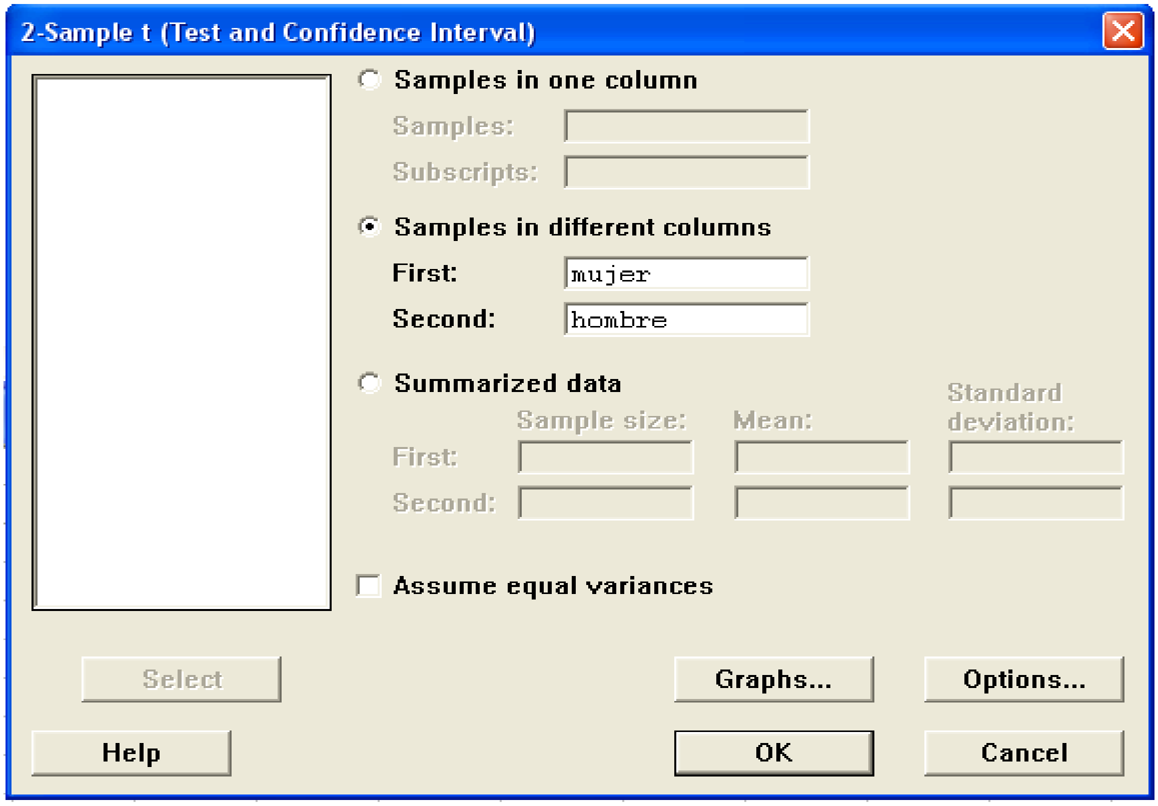


Figura 7.23. Ventana de diálogo de **2-sample t** para el Ejemplo 7.14.

Interpretación: *Como el "P-value" es .083 > .05 aunque no por mucho, se concluye que no hay suficiente evidencia de que el promedio académico de las mujeres sea mayor que el de los hombres.*

7.7 Comparando media de dos poblaciones usando muestras pareadas

En este caso se trata de comparar dos métodos o tratamientos, pero se quiere que las unidades experimentales donde se aplican los tratamientos sean las mismas, ó los más parecidas posibles, para evitar influencia de otros factores en la comparación, como por ejemplo, cuando se desea comparar dos medicamentos para curar una emfermedad es bastante obvio que el sujeto al cual se aplican los medicamentos influye sustancialmente en la comparación de los mismos. Otro ejemplo es en educación, supongamos que se da un seminario sobre un tópico en particular y queremos luego evaluar la efectividad del seminario. Es natural pensar que algunos individuos entenderán mejor el material que otros, tal vez, debido a la preparación que tienen de antemano. Así que lo más justo es dar una prueba antes y después del seminario y comparar estos resultados individuo por individuo.

Sea X_i el valor del tratamiento I y Y_i el valor del tratamiento II en el *i-ésimo* sujeto. Consideremos $d_i = X_i - Y_i$ la diferencia de los tratamientos en el *i-ésimo* sujeto. Las inferencias que se hacen son acerca del promedio poblacional μ_d de las d_i. Si $\mu_d = 0$, entonces significa que no hay diferencia entre los dos tratamientos.

En **MINITAB** eligiendo la secuencia **Stat ▸ Basic Statistics ▸ paired t** se hacen inferencias para muestras pareadas. Básicamente lo que se hace es obtener una columna de diferencias y a ésta columna es que se le aplica la opción **1-sample t test.**

Un intervalo de confianza del 100(1-α)% para la diferencia poblacional μ_d dada una mestra de mataño n es de la forma

$$(\bar{d} - t_{(n-1,\alpha/2)}\ s_d/\sqrt{n}\ ,\ \bar{d} + t_{(n-1,\alpha/2)}\ s_d/\sqrt{n}\ )$$

donde $\bar{d}$, es media de las diferencias muestrales d_i y $s_d = \sqrt{\dfrac{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$ es la desviación estándar.

También se puede hacer las siguientes pruebas de hipótesis:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
$H_o: \mu_d = 0$	$H_o: \mu_d = 0$	$H_o: \mu_d = 0$
$H_a: \mu_d < 0$	$H_a: \mu_d \neq 0$	$H_a: \mu_d > 0$

Prueba Estadística:

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$ se distribuye con una t de Student con n-1 gl.

Decisión:

Si $t < -t_\alpha$ entonces se rechaza H_o	Si $\mid t \mid > t_{\alpha/2}$ entonces se rechaza H_o	Si $T_{cal} > t_\alpha$ entonces se rechaza H_o

Las fórmulas pueden generalizarse para probar la hipótesis de que la diferencia poblacional entre los dos tratamientos es D_o.

Ejemplo 7.15 Un médico desea investigar si una droga tiene el efecto de bajar la presión sanguinea en los usuarios. El médico eligió al azar 15 pacientes mujeres y les tomó la presión, luego les recetó la medicina por un periodo de 6 meses, y al final del mismo nuevamente les tomó la presión. Los resultados son como siguen:

	Sujetos														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antes	70	80	72	76	76	76	72	78	82	64	74	92	74	68	84
Después	68	72	62	70	58	66	68	52	64	72	74	60	74	72	74

Solución:

Sea μ_d que representa la media poblacional de las diferencias. Entonces:
La hipótesis nula es que H_o: $\mu_d = 0$ (La droga no tiene ningún efecto)
La hipótesis alterna es H_a: $\mu_d > 0$ (La droga tiene efecto, la presión antes de usar la droga era mayor que después de usarla).

La ventana de diálogo **paired t** se completará como se muestra en la Figura 7.24 y oprimiendo **Options…**, se obtiene una ventana de diálogo que se completa como en la Figura 7.25. Los resultados en la ventana **session** serán como sigue:

Paired T-Test and CI: Antes, Despues

```
Paired T-Test and Confidence Interval

Paired T for Antes - Despues

                  N      Mean     StDev   SE Mean
Antes            15     75.87      6.86      1.77
Después          15     67.07      6.67      1.72
Difference       15      8.80     10.98      2.83

95% CI for mean difference:(2.72, 14.88)
T-Test of mean difference = 0  (vs > 0): T-Value = 3.11    P-Value =
0.004
```

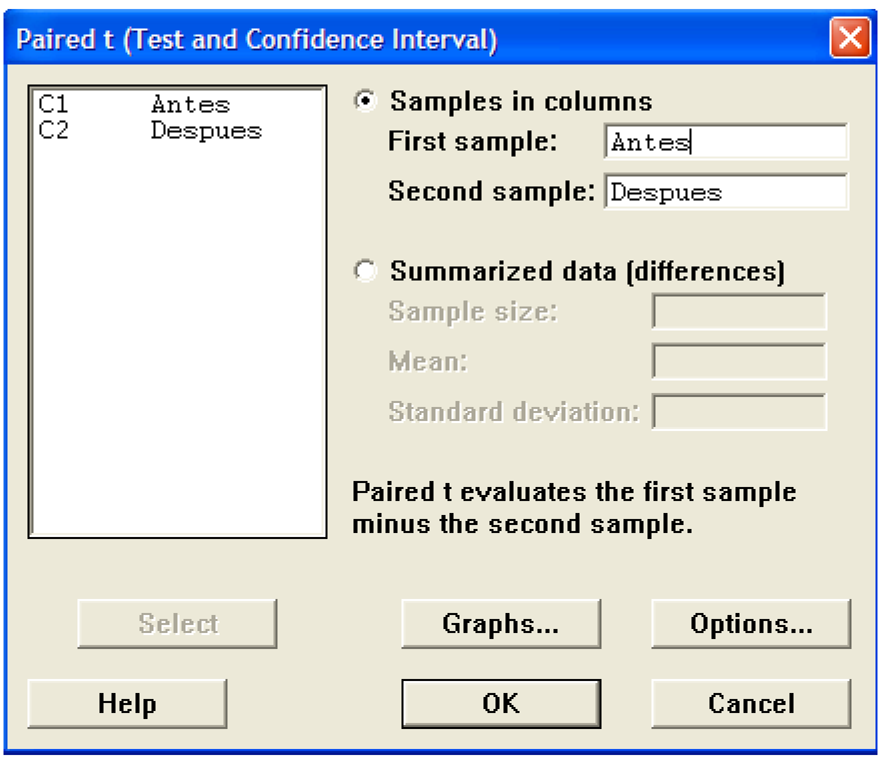


Figura 7.24. Ventana de diálogo de **Paired t** para el Ejemplo 7.15

Interpretación: *Notando que el "P-value" es .004 menor que .05, se rechaza la hipótesis nula y se llega a la conclusión de que, efectivamente la droga reduce la presión sanguinea. Por otro lado, se puede observar que el intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias es* (2.72, 14.88)*, el cual no contiene a cero, ésta es otra razón para rechazar la hipótesis nula.*

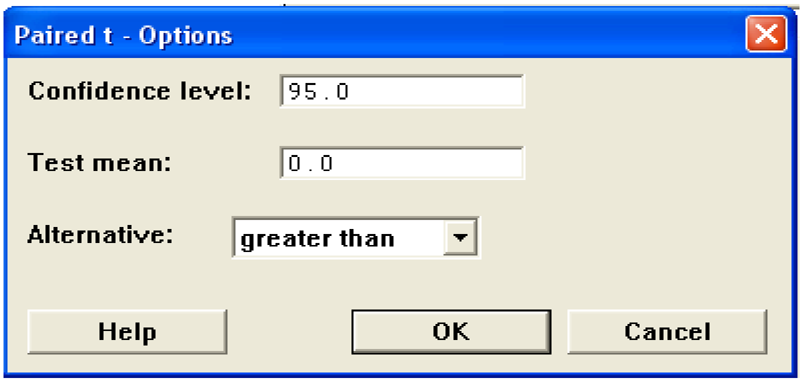


Figura 7.25. Ventana de diálogo que aparece al oprimir **options** en **Paired t.**

7.8 Comparando dos proporciones

Algunas veces se desea comparar la proporción con que ocurre un mismo evento en dos poblaciones distintas. Esto conlleva a hacer inferencias acerca de la diferencia $p_1 - p_2$. Supongamos que de una de las poblaciones sacamos una muestra de tamaño m, y que en ella ocurre el evento X_1 veces, y de la segunda población sacamos una muestra de tamaño n y que en ella ocurre el evento X_2 veces. Se puede mostrar que el siguiente estadístico:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{m} + \frac{p_2 q_2}{n}}}$$

donde $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{m}$, $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n}$, $q_1 = 1-p_1$ y $q_2 = 1-p_2$ se distribuye aproximadamente como una normal estándar cuando n y m son grandes tal que, $m\hat{p}_1$ y $n\hat{p}_2$ son mayores que 5.

Un intervalo de confianza aproximado del 100(1-α) para la diferencia de las proporciones será de la forma:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{m} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n}}$$

Si la hipótesis nula Ho: $p_1 = p_2$ es cierta, entonces el estadístico mencionado anteriormente se convierte en:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}}$$

donde, p es estimado por $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{m + n}$. Luego, las fórmulas para pruebas de hipótesis serán como siguen:

Caso I	Caso II	Caso III
$H_o: p_1 = p_2$	$H_o: p_1 = p_2$	$H_o: p_1 = p_2$
$H_a: p_1 < p_2$	$H_a: p_1 \neq p_2$	$H_a: p_1 > p_2$

Prueba Estadística:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}}$$

Decisión:

Si $Z_{cal} < Z_\alpha$ entonces se rechaza H_o	Si $Z_{cal} < Z_{\alpha/2}$ o $Z_{cal} > Z_{1-\alpha/2}$ entonces se rechaza H_o	Si $Z_{cal} > Z_{1-\alpha}$ entonces se rechaza H_o

En **MINITAB**, para hacer inferencia acerca de la diferencia de dos proporciones se sigue la secuencia **Stat ▸ Basic Statistics ▸ 2 proportions.**

Ejemplo 7.16 Un médico ha sugerido que un ataque cardíaco es menos probable que ocurra en hombres que practican alguna clase de deporte. Se elige una muestra al azar de 300 hombres, de los cuales 100 practican alguna clase de deporte y de ellos sólo 10 han sufrido un ataque cardíaco. De los 200 que no practican deportes, 25 han sufrido ataques cardíacos. Probar si los resultados de las muestras apoyan lo sugerido por el médico.

Solución:
La hipótesis nula es H_o: $p_1 = p_2$ (las probabilidades de sufrir ataque cardíaco son iguales para ambos grupos) y la hipótesis alterna es H_a: $p_1 < p_2$ (la probabilidad de sufrir ataque cardíaco es menor en hombres deportistas).

La ventana de diálogo se completará como se muestra en la Figura 7.26.

Notar que hay tres maneras de entrar los datos para hacer esta prueba estadística.

El primer caso es cuando los datos están en dos columnas, en la primera columna van las secuencias de éxitos y fracasos y en la segunda se identifica a que grupo pertenece cada uno de ellos y se usa **Samples in one column.**

El segundo caso es cuando las secuencias de éxitos y fracasos de cada grupo van en columnas distintas y se usa **Samples in diferent columns.**

En el tercer caso se dan los totales de éxitos y los tamaños de cada grupo y se usa **Summarized data**. En el ejemplo se ha usado esta última opción, ver Figura 7.26.

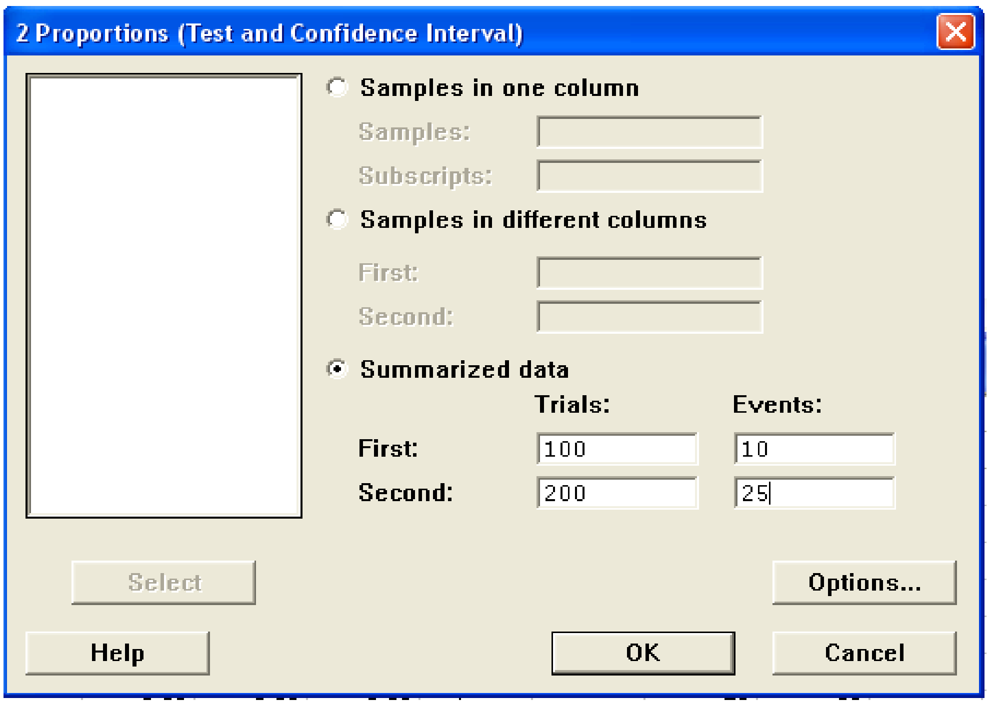


Figura 7.26. Ventana de diálogo de **2 Proportions** para el Ejemplo 7.16

Oprimiendo **Options…** en la ventana de diálogo de la Figura 7.26 se obtiene:

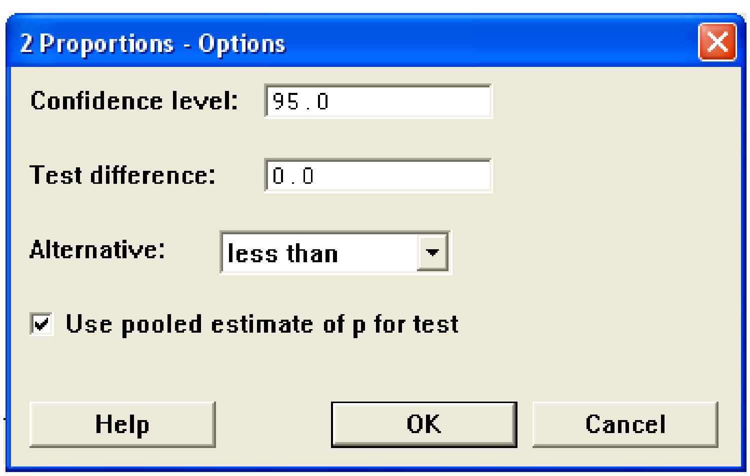


Figura 7.27. Ventana de diálogo que aparece al oprimir **options** en **2 Proportions.**

Notar que aparece marcado que la prueba estadística usa un estimado combinado para la proporción poblacional. Se obtienen los siguientes resultados en la ventana **session:**

Test and CI for Two Proportions

```
Sample   X    N  Sample p
1       10  100  0.100000
2       25  200  0.125000


Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference:  -0.025
95% upper bound for difference:  0.0375666
Test for difference = 0 (vs < 0):  Z = -0.66  P-Value = 0.256
```

Interpretación: *En los resultados aparece el estimado de la diferencia de las dos proporciones, el intervalo de confianza del 95% para dicha diferencia, la prueba estadística para igualdad de proporciones y su "p-value". Viendo que el "P-value" = .256 es mucho mayor que .05 se concluye que no hay evidencia suficiente para afirmar que la probabilidad de sufrir un ataque cardiaco entre los hombres deportistas es menor que de la de los hombres que no practican deportes. Notar que el intervalo de confianza contiene a cero, lo cual es otra razón para aceptar la hipótesis nula.*

Ejemplo 7.17. Un profesor piensa que el porcentaje de estudiantes admitidos a la Universidad durante el presente año es mayor para los solicitantes de escuela privada que para los que vienen de escuela pública. El basa su afirmación en una muestra de 30 solicitantes tomadas al azar. Los datos están en el archivo **comp2pr**. ¿Habrá suficiente evidencia para apoyar la afirmación del profesor?

Solución:

Sea p_h la proporción de estudiantes admitidos entre todos los solicitantes de escuela privada y p_e la proporción de estudiantes admitidos entre todas las solicitudes de escuela pública. Entonces, las hipótesis nula y alterna serán:

$H_0 : p_h = p_e$ (o también $p_h - p_e = 0$)

$H_a : p_h > p_e$ (o también $p_h - p_e > 0$)

La ventana de diálogo se completará como en la Figura 7.28.

Es importante hacer notar que en la ventanita **samples** va la columna que contiene los valores de la variable que se desea comparar en este caso *admisión* y en la columna **Subscripts** van los grupos, en este caso *escuela.*

Como la variable *escuela* también asume dos valores distintos, es posible intercambiar las dos columnas, pero se estarían probando otras hipótesis, como por ejemplo, comparar las proporciones de estudiantes de escuela pública entre los admitidos y no admitidos.

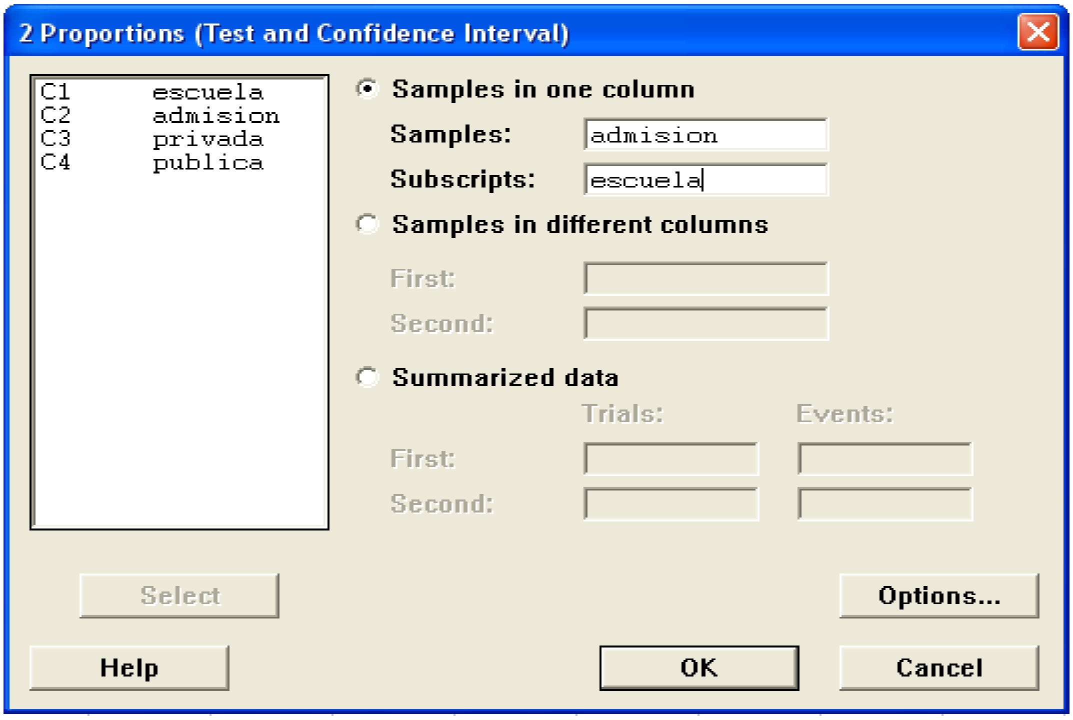


Figura 7.28. Ventana de diálogo de **2 Proportions** para el Ejemplo 7.17.

Al oprimir el botón **Options** aparece una ventana de diálogo que se completa como sigue:

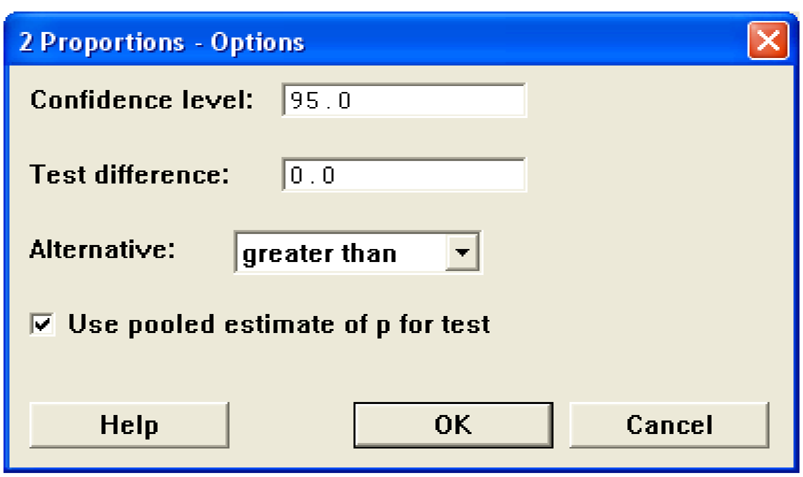


Figura 7.29. Ventana de diálogo de **options** en **2 Proportions** para el Ejemplo 7.17.

Los resultados que aparecen en la ventana **session** son los siguientes:

Test and CI for Two Proportions: admision, escuela

```
Event = si

escuela   X   N  Sample p
priv     13  17  0.764706
publ      5  13  0.384615

Difference = p (priv) - p (publ)
Estimate for difference:  0.380090
95% lower bound for difference:  0.100994
Test for difference = 0 (vs > 0):  Z = 2.11  P-Value = 0.018

* NOTE * The normal approximation may be inaccurate for small samples.

Fisher's exact test: P-Value = 0.061
```

Interpretación: *Como el "P-value" = .0018 es menor que .05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que hay evidencia para apoyar lo que afirma el profesor, el porcentaje de estudiantes solicitantes de escuela privada que son admitidos es mayor que el de las escuelas públicas. Notar que el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones no contiene a CERO, ésta es otra razón para rechazar la hipótesis nula.*

EJERCICIOS

Para conseguir los archivos de datos accesar a la siguiente dirección en la internet www.math.uprm.edu/~edgar/datos.html o mandar un mensaje al autor.

1. Una empresa afirma que su nuevo programa de dieta hace que una persona pierda en promedio 22 libras en 5 semanas, con una desviación estándar de 10.2 libras. Se toma una muestra del peso perdido en 5 semanas por 56 participantes del programa y se obtiene un promedio de 23.5 libras. Al 5 por ciento de significación, ¿Habrá suficiente evidencia para concluir que la afirmación de la empresa es cierta?

2. El puntaje promedio en la parte matemática del College Board de los estudiantes admitidos a programas de ciencias en ingeniería en 1994, fue de 685 con una desviación estándar de 80. Un profesor universitario piensa que ese promedio ha bajado en 1997 porque en una muestra de 15 estudiantes elegidos al azar obtuvo los siguientes resultados:

   620 683 679 580 593 690 695 559 601 720 745 540 680 579 611

Al 1 por ciento de significación, ¿Habrá suficiente evidencia para apoyar lo que dice el profesor? Asumir que la desviación estándar para 1997 es la misma que para 1994.

3. Una compañia embotelladora afirma que sus botellas plásticas de refresco tienen una capacidad de 300 mililitros. Un cliente de la compañía piensa que ese número está sobreestimado, pués en una muestra de 72 botellas se obtuvo un peso promedio de 295 mililitros por botella. Asumiendo que la desviación estándar poblacional de los pesos es de 3 ml.

   a) ¿Habrá suficiente evidencia para apoyar la afirmación del cliente? Usar un nivel de significación del 1%.
   b) ¿Cuál es el valor P de la Prueba? Interpretar el resultado.

4. Un investigador desea hallar un intervalo de confianza del 99% para el tiempo promedio de supervivencia (en años) para todos los pacientes sometidos a una operación cardiaca usando la siguiente muestra de 12 pacientes:

   10.8 15.3 8.1 6.9 15.4 10.9 11.4 9.4 12.1 13.2 7.9 13.3

   Considerar que la desviación estándar es 3 años.

5. Un intervalo de Confianza del 95% para estimar el peso promedio de los recién nacidos en un hospital basado en una muestra de tamaño 36 resultó ser (4.0, 10.5).

   a) Hallar el peso promedio muestral.
   b) Hallar un Intervalo de Confianza del 90% para el peso promedio de todos los recién nacidos en el hospital. Interpretar su resultado.

6. Según estudios médicos se estima que el nivel promedio de fosfato en un paciente de diálisis es de 5 miligramos por decilitro (mg/dl). Un patólogo obtuvo las siguientes mediciones de niveles de fosfato en la sangre de 18 pacientes de diálisis:

   5.2 4.6 4.8 5.7 6.2 6.1 4.9 5.5 4.9 6.0 5.6 5.2
   5.3 5.7 6.2 5.8 5.6 6.9

   ¿Dará esta muestra tomada suficiente evidencia para comprobar lo que afirman los estudios médicos acerca de pacientes de diálisis? Usar un nivel de significación del 1 por ciento.

7. Los datos en el archivo **transp** representan los tiempos de vida (en años) de 12 personas a las que se le efectuó un transplante de corazón. Probar, usando un 5 por ciento de significación, que la varianza de los tiempos es menor que 20.

8. Los datos en el archivo **cold** representan dos grupos. El primer grupo consiste de 10 personas que cogieron catarro y a quienes se les dio tabletas de 1 gramo de vitamina C 4 veces al dia. El segundo es el grupo Control, que consiste de 12 personas a quienes se les dio tabletas Placebo, que parecían y tenían sabor de vitamina C. Se continuó el experimento hasta que las personas se curaban del catarro y se registró el número de días que tardaron en curarse. ¿Piensa Ud. que hay suficiente evidencia para concluir que tomar 4 gramos diarios de vitamina C reduce el tiempo de duración del catarro? Asumir que las poblaciones de donde proceden las muestras tienen igual varianza.

9. Un Sociólogo desea probar si hay diferencia entre los salarios de mujeres y hombres recién graduados de la Escuela de Leyes. Para esto elige al azar 8 firmas de abogados y en cada una de ellas registra el sueldo anual (en miles) de un hombre y mujer abogado recién contratado. Los resultados están en el archivo **lawsal**. Probar que los salarios de los abogados varones es mayor que el de las mujeres.

10. Los datos en el archivo **compcancer.mtw** representan dos grupos. El primer grupo consiste de los tiempos de vida de 13 personas después que se les diagnosticó cáncer de Estómago, y el segundo los tiempos de vida de 17 personas a quienes se les diagnosticó cáncer de pulmón.

    a) Al 5 por ciento de significación, probar si la varianza del tiempo de vida de los que sufren de cáncer de pulmón es menor que 60000.
    b) Probar si la varianza de los tiempos de vida para ambos tipos de pacientes es la misma
    c) Probar si el tiempo de vida promedio de los pacientes de pulmón es menor que el de los pacientes de estómago.

11. Los datos en el archivo **adiest,** representan los puntajes en un test de comprensión de un idioma extranjero de 12 personas antes de asistir a un curso de verano y después de terminar el curso. Se desea probar si el curso mejora el nivel de comprensión del idioma extranjero.

12. El archivo **hospital** contiene información acerca de varias características de 25 pacientes que ingresaron al hospital. Estas son:

    dur_stay: duración de la estadía en el hospital.
    edad: edad del paciente.
    sexo: sexo del paciente.
    temp: temperatura que tenía al ingresar.
    wbc: contaje de glóbulos blancos.
    antibio: si le pusieron antibiótico o no.
    bact_cul: Si le hicieron cultivo de bacteria o no.
    servicio: El tipo de servicio que le hiceron, médico o quirúgico.

a) Probar si hay igualdad de varianza de la duracion de la estadía en el hospital tanto para hombres como mujeres.
b) Probar si la estadia en el hospital es más larga para los varones que para las mujeres.
c) Probar si la proporcion de pacientes que son intervenidos quirúrgicamente es menor para las mujeres que para los hombres.