7.6 Comparación entre dos medias Poblacionales usando muestras independientes

Supongamos que se tiene dos poblaciones distribuidas normalmente con medias desconocidas μ_1 y μ_2, respectivamente. Se puede aplicar una **prueba t de Student** para comparar las medias de dichas poblaciones basándonos en dos muestras independientes tomadas de ellas. La primera muestra es de tamaño m, con media $\bar{x}$ y varianza s_1^2 y la segunda muestra es de tamaño n, tiene media $\bar{y}$ y varianza s_2^2.

Si las varianzas de las poblaciones son iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) entonces se puede mostrar que:

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

se distribuye como una t con m+n-2 grados de libertad. En este caso la varianza poblacional σ^2 es estimada por una varianza combinada de las varianzas de las dos muestras tomadas, dada por la siguiente fórmula:

$$s_p^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

Un intervalo de confianza del 100(1-α) % para la diferencia μ_1-μ_2 de las medias poblacionales será de la forma:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{(\alpha/2, n+m-2)} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

Las fórmulas para las pruebas de hipótesis son las siguientes:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
$H_o: \mu_1 = \mu_2$	$H_o: \mu_1 = \mu_2$	$H_o: \mu_1 = \mu_2$
$H_a: \mu_1 < \mu_2$	$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_a: \mu_1 > \mu_2$

Prueba Estadística:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$ con m+n-2 grados de libertad

Decisión:

Si $t_{cal} < -t_\alpha$ entonces se rechaza H_o	Si $t_{cal} < t_{\alpha/2}$ o $t_{cal} > t_{1-\alpha/2}$ se rechaza H_o	Si $t_{cal} > t_{1-\alpha}$ se rechaza H_o

Las fórmulas se pueden generalizar para probar hipótesis de las diferencias de las dos medias es una cantidad especificada D_o. En **MINITAB**, para hallar intervalos de confianza de diferencia de dos medias poblacionales y hacer prueba de hipótesis para comparar dos grupos se sigue la secuencia **STAT ▸ 2-sample t.**

Ejemplo 7.13. Se desea comparar si los estudiantes de escuelas privadas y públicas tienen igual rendimiento en la prueba de aprovechamiento matemático del College Board. Los datos aparecen en el ejemplo 7.11.

Solución:
En el ejemplo 7.11 se concluyó usando la prueba de F que que había igualdad de varianzas de las poblaciones de donde provenían las muestras. Luego la ventana de diálogo **2 sample t** se completa como se muestra en la figura 7.20.
Notar que aparece seleccionada la opción **samples in one column** porque los datos de las dos muestras van en una misma columna (*aprovech*), y en otra columna (*escuela*) van los valores que permiten identificar a qué muestra pertenece el dato. La opción **Samples in different columns** se usa cuando las dos muestras están en columnas separadas. Notar además que la opción **Assume equal variances** aparece marcada.
Al oprimir el botón **Options** se puede elegir el nivel de confianza, el valor de la hipótesis que se quiere probar y la dirección de la hipótesis alterna tal como se muestra en la figura 7.21

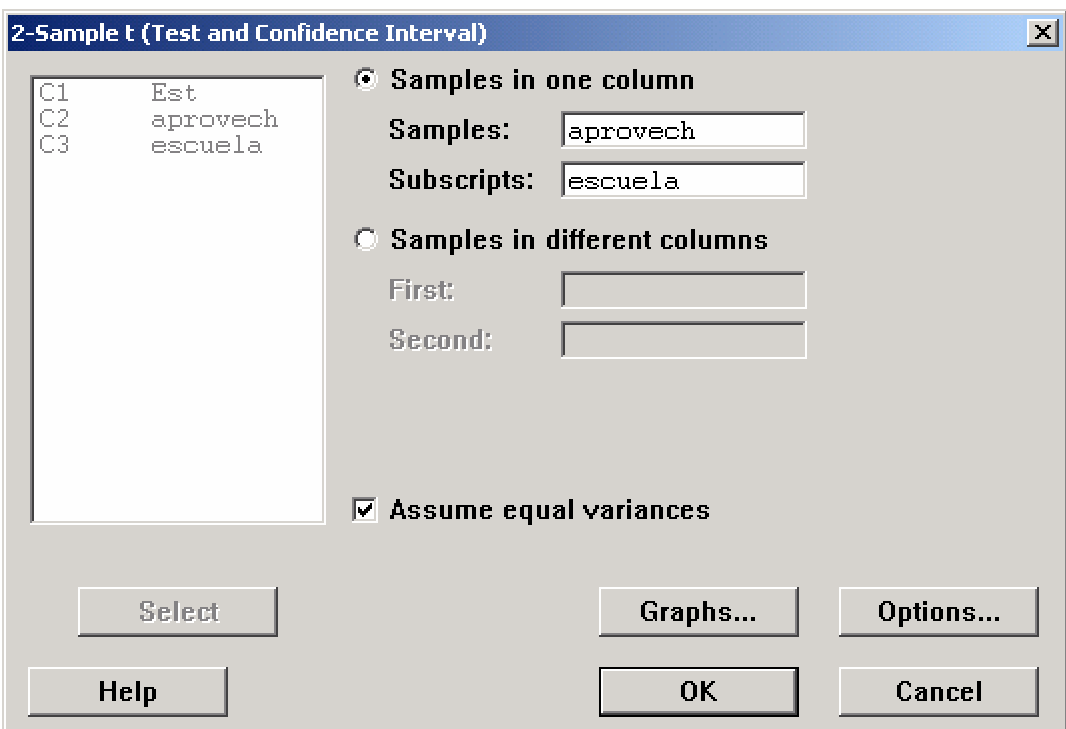

Figura 7.20. Ventana de diálogo de **2-sample t** para el ejemplo 7.13.

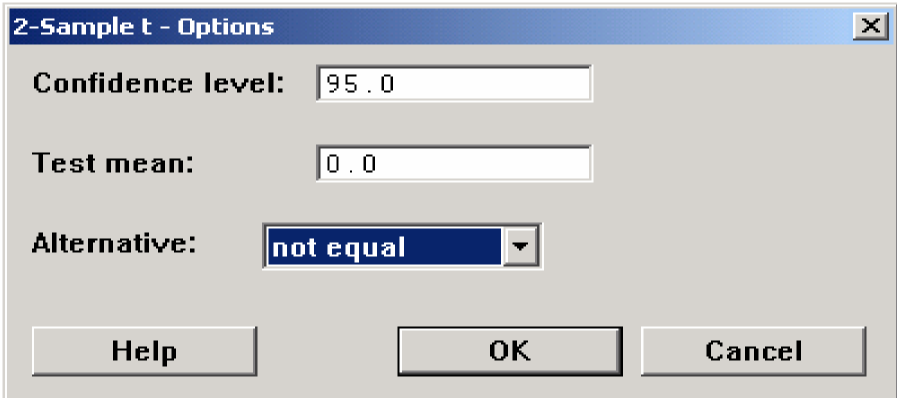

Figura 7.21. Ventana de diálogo de **Options** para **2-sample t**

Los siguientes resultados aparecerán en la ventana **session:**

Two-Sample T-Test and CI: aprovech, escuela

```
Two-sample T for aprovech

escuela     N      Mean     StDev   SE Mean
privada     6     680.8      55.3        23
pública     8     645.0      45.1        16

Difference = mu (privada) - mu (publica)
Estimate for difference:  35.8
95% CI for difference: (-22.6, 94.3)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = 1.34  P-Value = 0.206  DF = 12
Both use Pooled StDev = 49.6
```

Interpretación:
El valor del "P-value" es .206 mayor que el nivel de significación α=.05, por lo tanto NO se rechaza la hipótesis nula y se concluye de que no hay evidencia de que los estudiantes de escuela pública tengan un rendimiento distinto que los de escuela privada en las pruebas de aprovechamiento. El número de grados de libertad de la t es 12.
Notar que el intervalo de confianza del 95% para la diferencia es (–22.6,94.3) que contiene a cero. Este es otra manera de justificar que se acepta la hipótesis nula.

Eligiendo la opción **Graphs** de la ventana de diálogo se obtiene los boxplots de los dos grupos, como aparece en la siguiente figura:

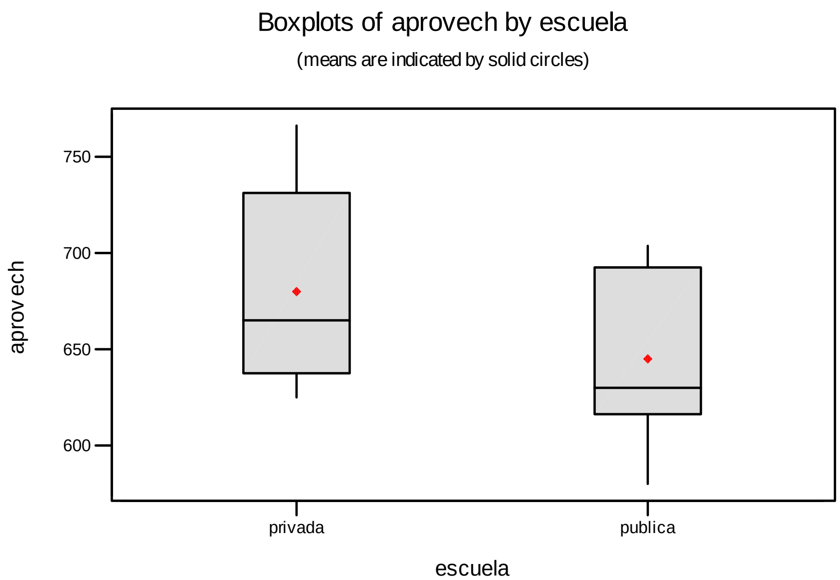

Figura 7.22. Comparación de dos grupos usando boxplots.

Interpretación: *No se puede apreciar una marcada diferencia entre las medianas (representadas por las lineas dentro de las cajas), ni las medias (representadas por los puntos rojos) de los grupos. La variabilidad de los dos grupos también es bastante similar ya que los dos "boxplots" tienen alargamiento similar.*

Si las varianzas de las poblaciones no son iguales, entonces se usa una prueba aproximada de t, donde el número de grados de libertad es calculado aproximadamente.

La prueba de t aproximada está dada por:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}}$$

donde los grados de libertad *df* son aproximados por la siguiente fórmula:

$$df = \frac{(c_1 + c_2)^2}{\frac{c_1^2}{m-1} + \frac{c_2^2}{n-1}}$$

con $c_1 = \frac{s_1^2}{m}$ y $c_2 = \frac{s_2^2}{n}$.

Ejemplo 7.14. Usando los datos del ejemplo 7.12, probar si las estudiantes mujeres tienen mejor promedio académico que los varones.

Solución:
En este caso los datos de cada muestra están en dos grupos separados y ya se mostró en el ejemplo 7.12 que ellos no tienen igual varianza. La ventana de diálogo se muestra en la figura 7.23. Notar que no se ha seleccionado la opción **Assume equal variances**. Luego se oprime el botón **Options** y se elige **greater than** en la ventanita **Alternative**.

Los resultados que aparecen en la ventana **session** serán::

Two Sample T-Test CI: Mujeres, Hombres

```
Two sample T for Mujeres vs Hombres

          N      Mean     StDev   SE Mean
Mujeres  16     3.249     0.359     0.090
Hombres  12     2.954     0.631      0.18

Difference: mu Mujeres-mu Hombres
Estimate for Difference=0.295
95% CI for mu Mujeres - mu Hombres: ( -0.136,  0.73)
T-Test of difference = 0 (vs >): T = 1.45  P = 0.083  DF = 16
```

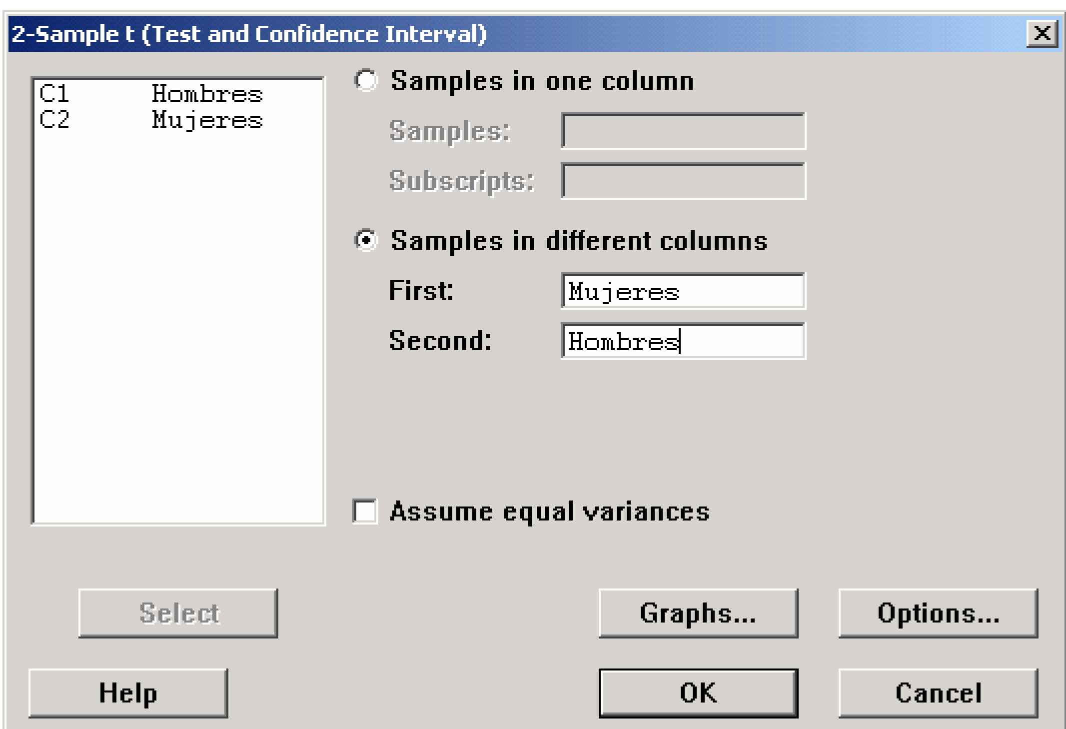

Figura 7.23. Ventana de diálogo de **2-sample t** para el ejemplo 7.14.

Interpretación: *Como el "P-value" es .0083 > .05 aunque no por mucho, se concluye que no hay suficiente evidencia de que el promedio académico de las mujeres sea mayor que el de los hombres.*

7.7 Comparando media de dos poblaciones usando muestras pareadas

En este caso se trata de comparar dos métodos o tratamientos, pero se quiere que las unidades experimentales donde se aplican los tratamientos sean las mismas, ó los más parecidas posibles, para evitar influencia de otros factores en la comparación, como por ejemplo cuando se desea comparar dos medicamentos para curar una enfermedad es bastante obvio que el sujeto al cual se aplica los medicamentos influye sustancialmente en la comparación de los mismos. Otro ejemplo es en educación, supongamos que se da un seminario sobre un tópico en particular y queremos luego evaluar la efectividad del seminario. Es natural pensar que algunos individuos entenderán mejor el material que otros talvez, debido a la preparación que tienen de antemano. Así que lo más justo es dar un test antes y después del seminario y comparar estos resultados individuo por individuo.

Sea X_i el valor del tratamiento I y Y_i el valor del tratamiento II en el i-ésimo sujeto. Consideremos $d_i=X_i-Y_i$ la diferencia de los tratamientos en el i-ésimo sujeto. Las inferencias que se hacen son acerca del promedio poblacional μ_d de las d_i. Si $\mu_d=0$, entonces significa que no hay diferencia entre los dos tratamientos.

En **MINITAB** eligiendo la secuencia **Stat** ▸ **Basic Statistics** ▸ **paired t** se hacen inferencias para muestras pareadas. Básicamente lo que se hace es obtener una columna de diferencias y a ésta columna es que se le aplica la opción **1-sample t test.**

Un intervalo de confianza del 100(1-α)% para la diferencia poblacional μ_d es de la forma

$$(\bar{d} - t_{(n-1,\alpha/2)}\ s_d/\sqrt{n}\ , \bar{d} + t_{(n-1,\alpha/2)}\ s_d/\sqrt{n}\ )$$

donde $\bar{d}$, es media de las diferencias muestrales d_i y $s_d = \sqrt{\dfrac{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$ es la desviación estándar.

También se puede hacer las siguientes pruebas de hipótesis:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
$H_o : \mu_d=0$	$H_o : \mu_d=0$	$H_o : \mu_d=0$
$H_a : \mu_d<0$	$H_a : \mu_d \neq 0$	$H_a : \mu_d>0$

Prueba Estadística:

$$T=\frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \quad \text{una t con n-1 g.l.}$$

Decisión:

Si $T_{cal} <-t_{\alpha}$ entonces se rechaza H_o	Si $\lvert T_{cal}\rvert >t_{\alpha/2}$ entonces se rechaza H_o	Si $T_{cal} >t_{\alpha}$ entonces se rechaza H_o

Las fórmulas pueden generalizarse para probar la hipótesis de que la diferencia poblacional entre los dos tratamientos es D_o.

Ejemplo 7.15. Un médico desea investigar si una droga tiene el efecto de bajar la presión sanguinea en los usuarios. El médico eligió al azar 15 pacientes mujeres y les tomó la presión luego les recetó la medicina por un periodo de 6 meses, y al final del mismo nuevamente les tomó la presión. Los resultados son como siguen:

	Sujetos														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antes	70	80	72	76	76	76	72	78	82	64	74	92	74	68	84
Después	68	72	62	70	58	66	68	52	64	72	74	60	74	72	74

Solución:

Sea μ_d que representa la media poblacional de las diferencias. Entonces:

La hipótesis nula es que H_o:μ_d=0 (La droga no tiene ningún efecto)

La hipótesis alterna es H_a: μ_d>0 (La droga tiene efecto, la presión antes de usar la droga era mayor que después de usarla).

La ventana de diálogo **paired t** se completará como se muestra en la figura 7.24 y oprimiendo **Options…,** se obtiene una ventana de diálogo que se completa como en la figura 7.25. Los resultados en la ventana **session** serán como sigue:

```
Paired T-Test and Confidence Interval

Paired T for Antes - Despues

                  N      Mean     StDev   SE Mean
Antes            15     75.87      6.86      1.77
Después          15     67.07      6.67      1.72
Difference       15      8.80     10.98      2.83

95% CI for mean difference: (2.72, 14.88)
T-Test of mean difference = 0 (vs > 0): T-Value = 3.11  P-Value = 0.004
```

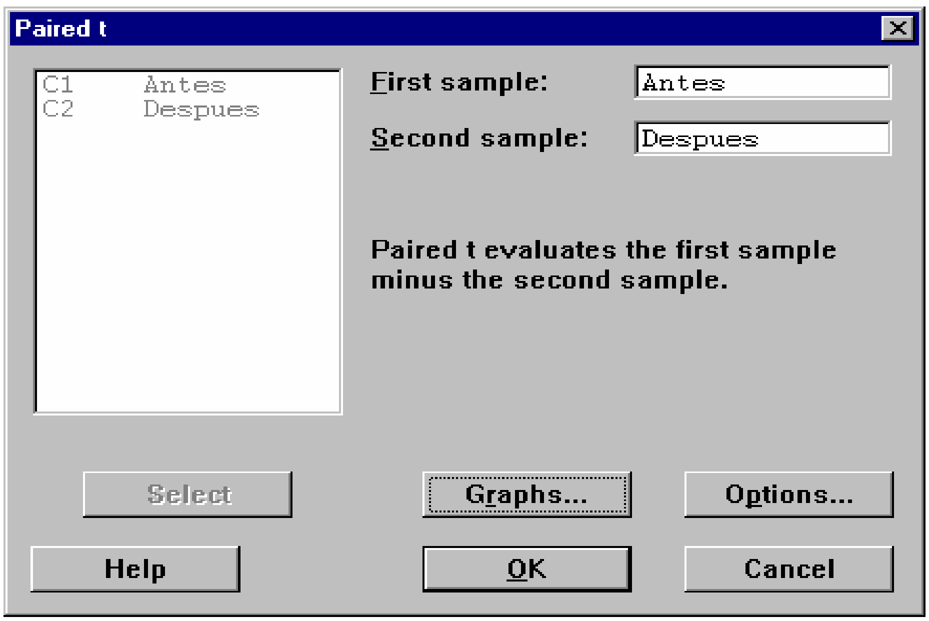

Figura 7.24. Ventana de diálogo de **Paired t** para el ejemplo 7.15

Interpretación: *Notando que el " P-value" es .004 menor que .05, se rechaza la hipótesis nula y se llega a la conclusión de que, efectivamente la droga reduce la presión sanguinea. Por otro lado, se puede observar que el intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias es (2.72, 14.88), el cual no contiene a cero, ésta es otra razón para rechazar la hipótesis nula.*

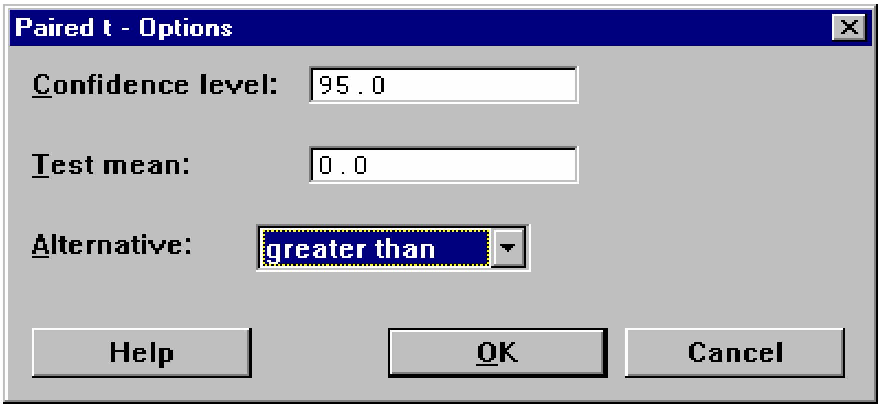

Figura 7.25. Ventana de diálogo que aparece al oprimir **options** en **Paired t**

7.8 Comparando dos proporciones

Algunas veces se desea comparar la proporción con que ocurre un mismo evento en dos poblaciones distintas. Esto conlleva a hacer inferencias acerca de la diferencia $p_1 - p_2$. Supongamos que de una de las poblaciones sacamos una muestra de tamaño m, y que en ella ocurre el evento X_1 veces, y de la segunda población sacamos una muestra de tamaño n y que en ella ocurre el evento X_2 veces. Se puede mostrar que el siguiente estadístico:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{m} + \frac{p_2 q_2}{n}}}$$

donde $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{m}$, $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n}$, $q_1=1-p_1$ *y* $q_2=1-p_2$ se distribuye aproximadamente como una normal estándar cuando n y m son grandes tal que, $m\hat{p}_1$ y $n\hat{p}_2$ son mayores que 5.

Un intervalo de confianza aproximado del 100(1-α) para la diferencia de las proporciones será de la forma:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{m} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n}}$$

Si la hipótesis nula Ho:$p_1=p_2$ es cierta, entonces el estadístico mencionado anteriormente se convierte en:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}}$$

donde, p es estimado por $\overline{p} = \dfrac{X_1 + X_2}{m+n}$. Luego, las fórmulas para pruebas de hipótesis serán como siguen:

Caso I	Caso II	Caso III
H_o: $p_1 = p_2$	H_o: $p_1 = p_2$	H_o: $p_1 = p_2$
H_a: $p_1 < p_2$	H_a: $p_1 \neq p_2$	H_a: $p_1 > p_2$
	Prueba Estadística: $z = \dfrac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}}$	
	Decisión:	
Si $z_{cal} < z_{\alpha}$ entonces se rechaza H_o	Si $z_{cal} < z_{\alpha/2}$ o $z_{cal} > z_{1-\alpha/2}$ se rechaza H_o	Si $z_{cal} > z_{1-\alpha}$ se rechaza H_o

En **MINITAB**, para hacer inferencia acerca de la diferencia de dos proporciones se sigue la secuencia **Stat** ▸ **Basic Statistics** ▸ **2 proportions.**

Ejemplo 7.16. Un médico ha sugerido que un ataque cardíaco es menos probable que ocurra en hombres que practican alguna clase de deporte. Se elige una muestra al azar de 300 hombres, de los cuales 100 practican alguna clase de deporte y de ellos sólo 10 han sufrido un ataque cardíaco. De los 200 que no practican deportes, 25 han sufrido ataques cardíacos. Probar si los resultados de las muestras apoyan lo sugerido por el médico.

Solución:
La hipótesis nula es H_o: $p_1=p_2$ (las probabilidades de sufrir ataque cardíaco son iguales para ambos grupos) y
La hipótesis alterna es H_a: $p_1<p_2$ (la probabilidad de sufrir ataque cardíaco es menor en hombres deportistas).

La ventana de diálogo se completará como se muestra en la figura 7.26

Notar que hay tres maneras de entrar los datos para hacer esta prueba estadistica.

El primer caso es cuando los datos están en dos columnas, en la primera columna van las secuencias de éxitos y fracasos, y en la segunda se identifica a qué grupo pertenece cada uno de ellos y se usa **Samples in one column.**

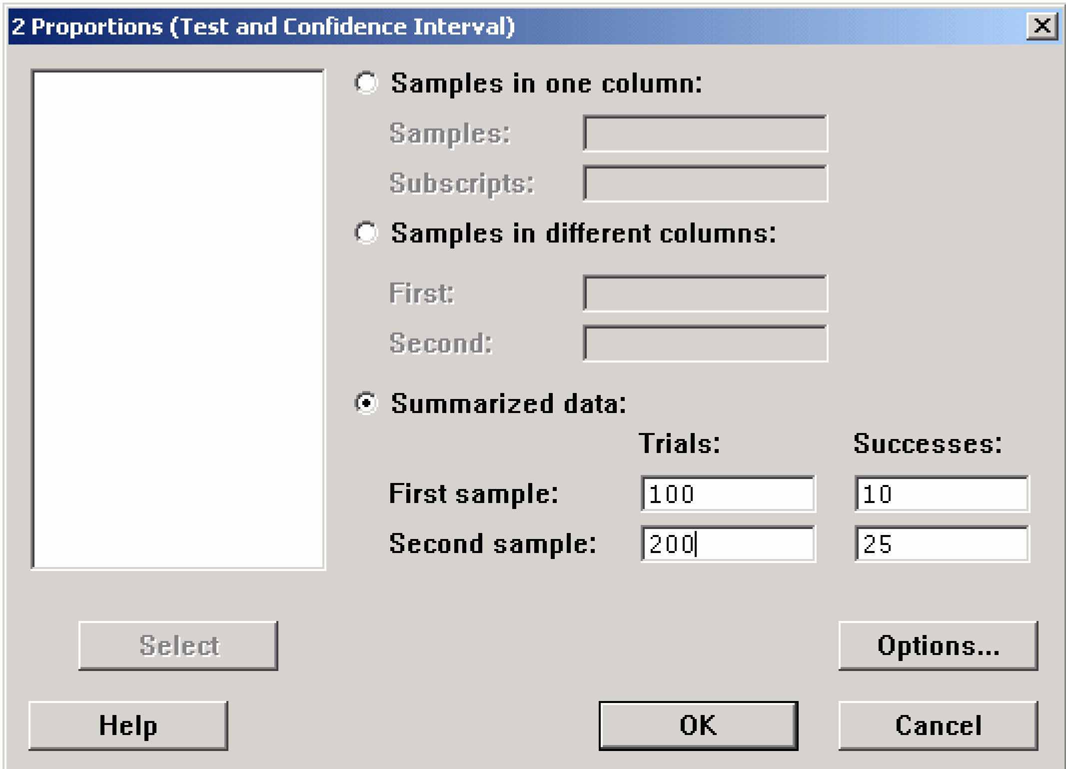

Figura 7.26. Ventana de diálogo de **2 Proportions** para el ejemplo 7.16

El segundo caso es cuando las secuencias de éxitos y fracasos de cada grupo van en columnas distintas y se usa **Samples in diferent columns.**

En el tercer caso se dan los totales de éxitos y los tamaños de cada grupo y se usa **Summarized data**. En el ejemplo se ha usado esta última opción.

Oprimiendo **Options** en la ventana de diálogo de la figura 7.26 se obtiene:

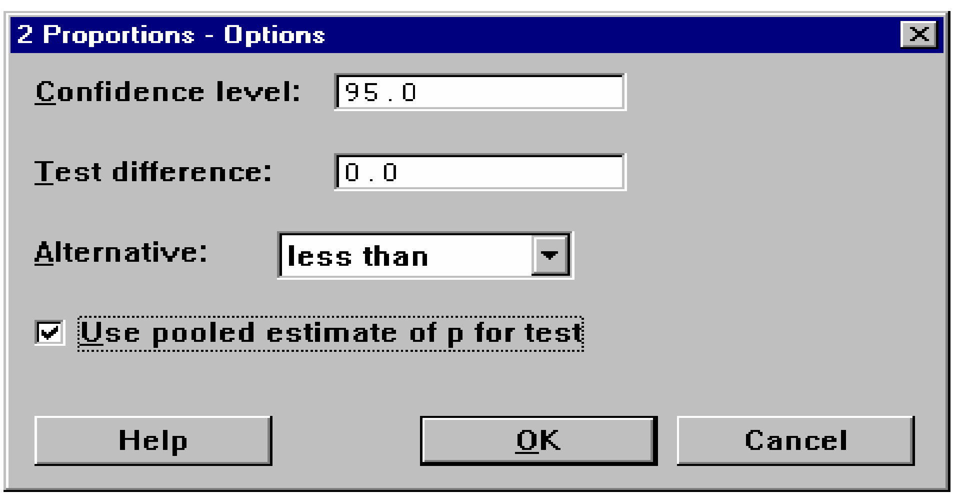

Figura 7.27. Ventana de diálogo que aparece al oprimir **options** en **2 Proportions**

Notar que aparece marcado que la prueba estadística usa un estimado combinado para la proporción poblacional. Se obtienen los siguientes resultados en la ventana **session:**

Test and Confidence Interval for Two Proportions

```
Sample      X      N  Sample p
1          10    100  0.100000
2          25    200  0.125000

Estimate for p(1) - p(2):  -0.025
95% CI for p(1) - p(2):  (-0.0995527, 0.0495527)
Test for p(1) - p(2) = 0 (vs < 0):  Z = -0.64  P-Value = 0.262
```

Interpretación: *En los resultados aparece el estimado de la diferencia de las dos proporciones, el intervalo de confianza del 95 % para dicha diferencia , la prueba estadística para igualdad de proporciones y su "p-value" . Viendo que el "P-value" =. 256 es mucho mayor que .05 se concluye que no hay evidencia suficiente para afirmar que la probabilidad de sufrir un ataque cardiaco entre los hombres deportistas es menor que de la de los hombres que no practican deportes. Notar que el intervalo de confianza contiene a cero, lo cual es otra razón para aceptar la hipótesis nula.*

Ejemplo 7.17. Un profesor piensa que el porcentaje de estudiantes admitidos a la Universidad durante el presente año es mayor para los solicitantes de escuela privada que para los que vienen de escuela pública. El basa su afirmación en una muestra de 30 solicitantes tomadas al azar. Los datos están en el archivo **comp2pr.** ¿Habrá suficiente evidencia para apoyar la afirmación del profesor?.

Solución:
Sea p_h, la proporción de estudiantes admitidos entre todos los solicitantes de escuela privada y p_e, la proporción de estudiantes admitidos entre todas las solicitudes de escuela pública. Entonces, las hipótesis nula y alterna serán:

Ho: $p_h=p_e$ (o también $p_h-p_e=0$)
Ha: $p_h>p_e$ (o también $p_h-p_e>0$)

La ventana de diálogo se completará como en la figura 7.28

Es importante hacer notar que en la ventanita **samples,** va la columna que contiene los valores de la variable que se desea comparar en este caso *admisión* y en la columna **Subscripts** van los grupos, que en este caso es *escuela.*

Como la variable *escuela* asume también dos valores distintos, es posible intercambiar las dos columnas, pero se estarían probando otras hipótesis, como por ejemplo comparar las proporciones de estudiantes de escuela pública entre los admitidos y no admitidos.

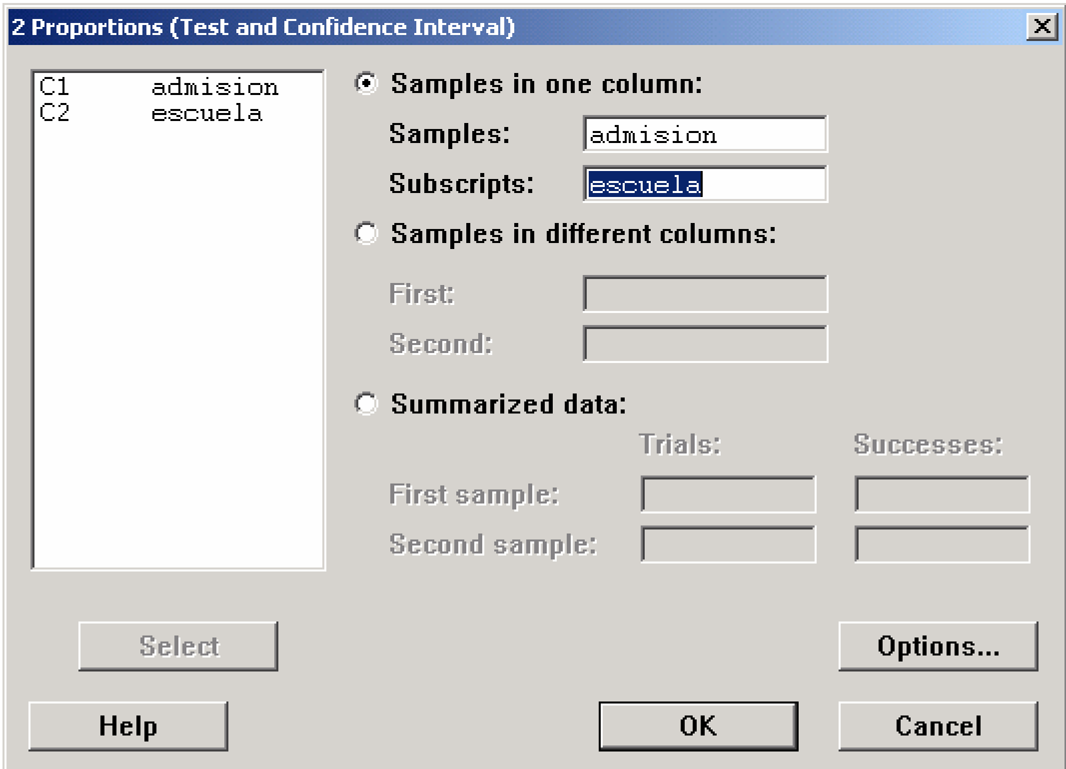

Figura 7.28. Ventana de diálogo de **2 Proportions** para el ejemplo 7.17

Al oprimir el botón **Options** aparece una ventana de diálogo que se completa como sigue:

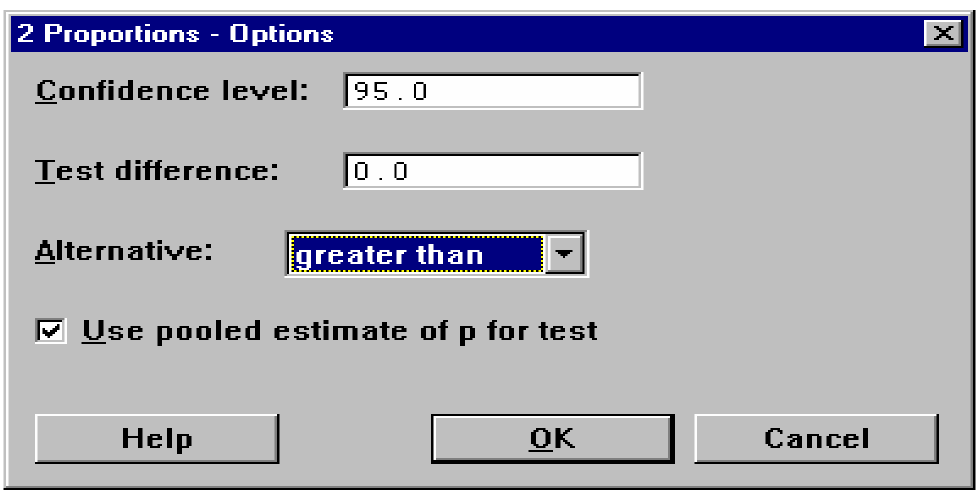

Figura 7.29. Ventana de diálogo de **options** en **2 Proportions** para el ejemplo 7.17

Los resultados que aparecen en la ventana **session** son los siguientes:

```
MTB > PTwo 'admision' 'escuela';
SUBC>   Stacked;
SUBC>   Confidence 95.0;
SUBC>   Test 0.0;
SUBC>   Alternative 1;
SUBC>   Pooled.
```

Test and Confidence Interval for Two Proportions

```
Success = si

escuela           X      N  Sample p
priv             13     17  0.764706
publ              5     13  0.384615

Estimate for p(priv) - p(publ):  0.380090
95% CI for p(priv) - p(publ):  (0.0475267, 0.712654)
Test for p(priv) - p(publ) = 0 (vs > 0):  Z = 2.11  P-Value = 0.018

* NOTE * The normal approximation may be inaccurate for small samples.
```

Interpretación: *Como el "P-value"=.0018 es menor que .005 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que hay evidencia para apoyar lo que afirma el profesor, el porcentaje de estudiantes solicitantes de escuela privada que son admitidos es mayor que el de las escuelas públicas.*

Notar que el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones no contiene a CERO, ésta es otra razón para rexhazar la hipótesis nula.