Universidad de Puerto Rico en Aguadilla
Departamento de Matemáticas

Exam I
Cálculo I
L12
9 de junio de 2010

Prof. José N. Díaz Caraballo Nombre Clave

Instrucciones. Resuelva cada uno de los ejercicios. *Demuestre todo el procedimiento.* Valor ~~10~~ pts c/u.

1. Encuentre el $\lim_{x\to -3}(2x+5)$ usando la definicion $\epsilon - \delta$.

8 pts

$\lim_{x\to -3}(2x+5) = -1$ si $|x-(-3)| < \delta = \epsilon/2$

$|(2x+5)-(-1)| < \epsilon$

$|(2x+5)+1| < \epsilon$

$|2x+6| < \epsilon$

$2|x+3| < \epsilon$

$\therefore$ si $|x-(-3)| < \delta = \epsilon/2$ entonces $|(2x+5)-(-1)| < \epsilon$

2. Encuentre el limite si existe de $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \lim \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

3. Encuentre el limite si existe de $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)}{(x-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

4. Use el teorema de valor intermedio para demostrar que $f(x) = x^2 - 6x - 2$ tiene una raíz en [0,3]

f(x) es continua $\therefore$ puedo usar TVI

$f(0) = -2$

$f(3) = -11$ no existe $c \in [0,3]$ t.q. $f(c) = 0$

Recuerda es grado 2

5. Encuentre las asintotas verticales y horizontales de $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$ $= \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-2)(x+1)}$

Asintotas horizontales

$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-2)(x+1)} = -\infty$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-2)(x+1)} = \infty$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-2)(x+1)} = -\infty$

$\lim_{x\to -1^+} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-2)(x+1)} = +\infty$

6.Encuentre $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$, demuestrela usando la definicion de la derivada.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ //

7. Encuentre la ecuacion de la recta tangente a $f(x) = (9-x^2)^{\frac{2}{3}}$ en $(1,4)$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(9-x^2)^{-\frac{1}{3}}(-2x) = \frac{-4}{3(9-x^2)^{1/3}} \qquad f'(1) = \frac{-4}{3(8)^{1/3}} = \frac{-\cancel{4}}{3(\cancel{2})} = -\frac{2}{3}$$

$$y-4 = -\frac{2}{3}(x-1)$$

$$y-4 = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}}$$

8.Encuentre la derivada de:

a) $f(x) = 6\sqrt{x} + 5\cos x$

$$f'(x) = \frac{6}{2\sqrt{x}} - 5\sin x = \frac{3}{\sqrt{x}} - 5\sin x$$

$$= \frac{-3}{2(1+\sin x)}$$

b) $f(x) = \frac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$ $= \frac{3-3\sin x}{2\cos x}$

$$f'(x) = \frac{-3\cos x \cdot 2\cos x - (3-3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2} = \frac{-6\cos^2 x + (3-3\sin x)(2\sin x)}{(2\cos x)^2}$$

$$= \frac{-6\cos^2 x + 6\sin x - 6\sin^2 x}{4\cos^2 x} = \frac{-6[\cos^2 x + \sin^2 x] + 6\sin x}{4\cos^2 x} = \frac{-6+6\sin x}{4(1-\sin x)} = \frac{-6(1-\cancel{\sin x})}{4(1-\cancel{\sin x})(1+\sin x)}$$

9.Encuentre la derivada de:
a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+1}} \cdot (2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$$

b) $f(x) = \sin(2x)\cos(2x)$

$$f'(x) = 2\cos(2x)\cos(2x) + \sin(2x)(-\sin(2x)(2))$$

$$= 2\cos^2(2x) - 2\sin^2(2x)$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= 2\cos^2(2x) - 2(1-\cos^2(2x))$$

$$= 2\cos^2(2x) - 2 + 2\cos^2(2x)$$

$$= 4\cos^2 x - 2$$

10. Use el teorema de Sandwich para probar que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos x = 0$

$|\cos x| \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-x^2 \leq \cos x \leq x^2$

$\lim_{x\to 0} (-x^2) \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cos x \leq \lim_{x\to 0} x^2$

$\therefore\ 0 \leq \lim_{x\to 0} x^2\cos x \leq 0$

$\therefore\ \lim_{x\to 0} x^2 \cos x = 0$

Bono (5pts)

Teorema. Sea f y g funciones diferenciables demuestre que $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$(fg)'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)[g(x)-g(c)]}{x-c} + \lim_{x\to c} g(c)\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right]$$

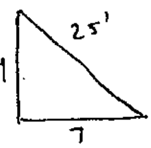
$$= f(c)g'(c) + g(c)f'(c)$$

Universidad de Puerto Rico en Aguadilla
Departamento de Matemáticas

Exam II
Cálculo I
L12
20 de junio de 2010

Prof. José N. Díaz Caraballo   Nombre Clave

Instrucciones. Resuelva cada uno de los ejercicios. *Demuestre todo el procedimiento.* **Valor 10 pts c/u. Ejercicio 7 valor 30pts.**



1. Una escalera de 25 pies esta recostada contra la pared de una casa . La base de la escalera esta siendo movida hacia fuera a una razón de 2 pies por segundos. ¿Qué tan rapido se esta moviendo la escalera hacia afuera? $x=7$ $y=24$ $\frac{dx}{dt}=2$

$$x^2+y^2=25^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[x^2+y^2=625\right]$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$2(7)(2)+2(24)\frac{dy}{dt}=0$$

$$28+48\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-28}{48}\ ft/s$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-7}{12}\ ft/s$$

2. Encuentre el $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$$

3. Encuentre el $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$

$$|\sin 2x|\le 1 \Rightarrow -1\le \sin 2x\le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x}\le\frac{\sin 2x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$$

4. Sea $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

a. Encuentre el dominio.

$4-x^2=0$

$x=\pm 2$ $\mathbb{D}_f = [-2, 2]$

b. Encuentre las raíces.

$x\sqrt{4-x^2}=0$ $\boxed{x=0}$ $4-x^2=0$ $\boxed{x=\pm 2}$

c. Encuentre los máximos y/o mínimos.

$f''(\sqrt{2}) \leq 0$ máx

$f''(-\sqrt{2}) > 0$ min

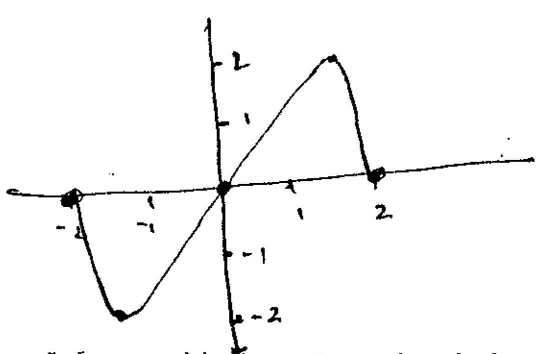
d. Encuentre donde es creciente y/o decreciente.

Int	f'	f
$[-2,-\sqrt{2})$	−	decreciente
$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	+	creciente
$(\sqrt{2},2)$	−	decreciente

e. Encuentre donde es concava hacia arriba y/o abajo.

Int	f''	
$(-2,0)$	+	arriba
$(0,2)$	−	abajo

f. Hacer la gráfica.



$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x)$

$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$= \frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ $4-2x^2=0$ $\boxed{x=\pm\sqrt{2}}$

Puntos Crítico $\boxed{x=\pm 2}$

$f''(x) = \frac{-4x(\sqrt{4-x^2}) - (4-2x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x)}{(4-x^2)}$

$= \frac{-4x(\sqrt{4-x^2}) + \frac{x(4-2x^2)}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)}$

$= \frac{-4x(4-x^2)+x(4-2x^2)}{(4-x^2)^{3/2}}$

$= \frac{-16x+4x^3+4x-2x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$

$= \frac{2x^3-12x}{(4-x^2)^{3/2}} \Rightarrow 2x^3-12x=0$

$2x(x^2-6)=0$

Punto de inflección $\leftarrow \boxed{x=0}$

$x=\pm\sqrt{6}$ Fuera del $\mathbb{D}_f$

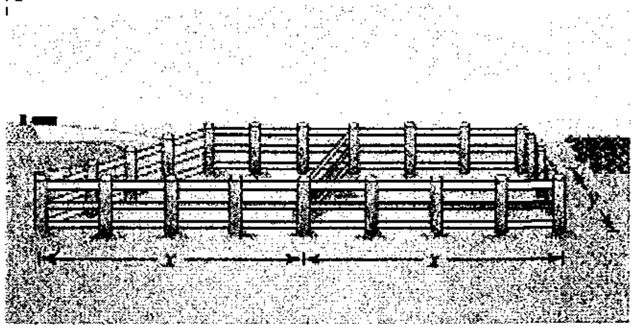
5. La suma del primer número al cuadrado y el segundo es 54 y su producto es máximo.

$y^2+x=54$ xy máximo

$x=54-y^2$ $f(y)=(54-y^2)y = 54y-y^3$ $f'(y)=54-3y^2$

$54-3y^2=0$ $f''(y)=-6y$

$y=\pm\sqrt{18}$ $\boxed{x=36}$ máximo en $y=\sqrt{18}$



$P = 4x + 3y$

$4x + 3y = 400$

$y = \frac{400 - 4x}{3}$

$A(x) = (2x)\left(\frac{400-4x}{3}\right)$

$= \frac{800}{3}x - \frac{8x^2}{3}$

6. Un granjero tiene 400 pies de cerca para crear dos corrales adjacente. ¿Cuáles son las dimensiones que maximizan el área?

$A'(x) = \frac{800}{3} - \frac{16}{3}x$ $\qquad y = \frac{200}{3}$ $\qquad A''(x) = \frac{-16}{3} < 0$ es un máximo

$\frac{800}{3} - \frac{16}{3}x = 0$

$x = \left(\frac{-800}{3}\right)\left(-\frac{3}{16}\right) = 50$

7. Use los diferenciales para aproximar $\sqrt{99.4}$ compare su resultado con la calculadora.

$f(100 - .6) \cong f(100) + f'(100)(-.6)$

$= \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}(-.6)$

$= 10 + \frac{1}{20}(-.6) \approx 9.97$

8. Determine cuál es el máximo o mínimo de $f(x) = \cos \pi x$ en $[0, 2\pi]$

$f'(x) = -\pi \sin \pi x \quad [0, 2\pi]$

$\pi x = 0 + 2n\pi \qquad \pi x = -\pi + 2n\pi$

$x = 2n \qquad x = -1 + 2n$

máximos $\qquad$ mínimo

Universidad de Puerto Rico en Aguadilla
Departamento de Matemáticas

Exam III
Cálculo I
L12
24 de junio de 2011

Prof. José N. Díaz Caraballo

Nombre Clave

Instrucciones. Resuelva cada uno de los ejercicios. *Demuestre todo el procedimiento.* **Valor 10 pts c/u.**

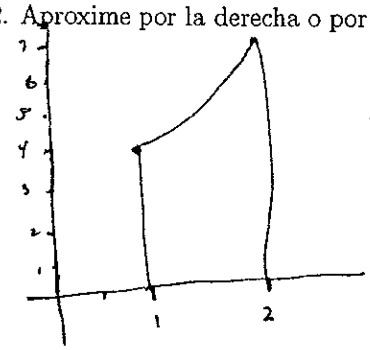
1. Aplique las reglas de integración básicas.

a. $\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$

b. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{1-\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \int x^{1/2}dx + \int x^{-1/2}dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C$

2. Aproxime por la derecha o por la izquierda con 5 rectángulos el área de $f(x) = x^2 + 3$, en el intervalo $[1, 2]$



$\frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$ $\quad 1+\frac{1}{5},\ 1+\frac{2}{5},\ 1+\frac{3}{5},\ 1+\frac{4}{5},\ 1+\frac{5}{5}$

$\text{Área} \simeq \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2+3\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\left(\frac{7}{5}\right)^2+3\right)\left(\frac{1}{5}\right)$
$+ \left(\left(\frac{8}{5}\right)^2+3\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\left(\frac{9}{5}\right)^2+3\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(2^2+3\right)\left(\frac{1}{5}\right)$

3. Encuentre el área exacta usando la suma de Riemann a $f(x) = 2x^2$, en el intervalo $[0, 3]$ $\quad \Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

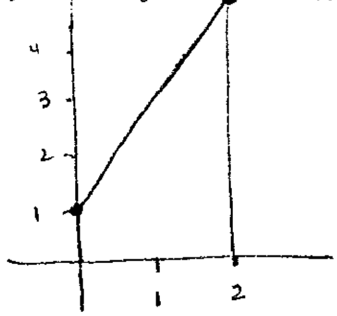
$x_i = \frac{3i}{n}$

$\int_0^3 2x^2dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2 \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{3i}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n}\left(\frac{9i^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{54}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{54}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \lim_{n\to\infty} 9\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = 18$

5 4. Dibuje la región correspondiente a la integral y evalue sin usar la antiderivada. $\int_0^2 (2x+1)dx$



$$A = (2 \times 5) - \frac{1}{2}(4 \cdot 2) = 10 - 4 = 6$$

5. Calcule $\int_{-2}^{2} |x+1|\,dx$ $= \int_{-2}^{-1} -(x+1)\,dx + \int_{-1}^{2} (x+1)\,dx = \left. -\frac{x^2}{2} - x \right|_{-2}^{-1} + \left. \frac{x^2}{2} + x \right|_{-1}^{2}$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & x+1 < 0 \end{cases} \qquad |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}+1\right) - \left(-\tfrac{4}{2}+2\right) + (2+2) - \tfrac{1}{2} + 1$$
$$= \tfrac{1}{2} + 4 + \tfrac{1}{2} = 5$$

6. Calcule $\int_0^1 \left(-x^3 + 2x^2 - 3x + 2\right) dx$ $= \left. -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right|_0^1$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{-3 + 8 - 18 + 24}{12} = \frac{11}{12}$$

7. Calcule $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\sec^2 x\,dx$ $= \left. 2\tan x \right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\tan\frac{\pi}{4} + 2\tan\frac{\pi}{4}$

$$= 4$$

8. Calcule $\int_{-1}^{0} (t^{1/3} - t^{2/3})\, dt$ $= \dfrac{t^{1/3+1}}{1/3+1} - \dfrac{t^{2/3+1}}{2/3+1}\Big|_{-1}^{0} = \dfrac{3t^{4/3}}{4} - \dfrac{3t^{5/3}}{5}\Big|_{-1}^{0}$

$= -\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{3(-1)}{5}\right) = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{-27}{20}$

9. Calcule $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{u^3-1}{u^2}\right) du$ $= \int_{-2}^{-1} u - u^{-2}\, du = \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^{-1}}{-1}\Big|_{-2}^{-1} = \dfrac{u^2}{2} + u^{-1}\Big|_{-2}^{-1}$

$= \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{1}{u}\Big|_{-2}^{-1}$

$= \left(\dfrac{1}{2} - 1\right) - \left(\dfrac{4}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - 1 - 2 + \dfrac{1}{2} = -2$

10. Calcule $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t + \cos t)\, dt$ $= \dfrac{2t^3}{3} + \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\dfrac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} + 1\right)$

$- \left(\dfrac{2\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} - 1\right) = \dfrac{4\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} + 2$

11. Calcule $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}\, d\theta$ $= \int_0^{\pi/4} \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta$

$= \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

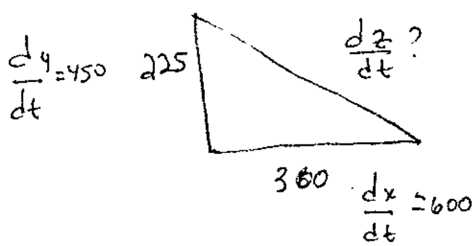
Universidad de Puerto Rico en Aguadilla
Departamento de Matemáticas

Bonus Exam II
Cálculo I
L12
23 de junio de 2010

Prof. José N. Díaz Caraballo Nombre Clave

Instrucciones. Resuelva cada uno de los ejercicios. *Demuestre todo el procedimiento.* **Valor 40 pts c/u. Ejercicio 2 valor 20pts.**

1. Dos aviones estan viajando a la misma altura y en dirección a un mismo punto mientras viajan en ángulos rectos uno del otro. Un avión esta a 225 millas del punto moviendose a una razón de 450 millas por hora. El otro avión esta a 300 millas del punto moviendose a una razón de 600 millas por hora. ¿A que razón esta decreciendo la distancia entre los aviones?



$x^2+y^2=z^2$

$225^2+300^2=z^2$

$z=375$

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2z\frac{dz}{dt}$

$2(300)(600)+2(225)(450)$

$=2(375)\frac{dz}{dt}$

$360{,}000+202{,}500=750\frac{dz}{dt}$

$562{,}500=750\frac{dz}{dt}$

$\frac{dz}{dt}=-750\frac{dz}{dt}$

2. Sea $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$

a. Encuentre el dominio.

$\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

b. Encuentre las raíces.

$x^2=0$

$\boxed{x=0}$

c. Encuentre los máximos y/o mínimos.

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+3)-x^2(2x)}{(x^2+3)^2}=\frac{2x^3+6x-2x^3}{(x^2+3)^2}=\frac{6x}{(x^2+3)^2}$$

Punto crítico $x=0$

mínimo

d. Encuentre donde es creciente y/o decreciente.

	f'	f
$(-\infty,0)$	$-$	decreciente
$(0,\infty)$	$+$	creciente

e. Encuentre donde es concava hacia arriba y/o abajo.

$$f''(x) = \frac{6(x^2+3)^2 - 6x(2(x^2+3))(2x)}{(x^2+3)^4} = \frac{6(x^2+3)^2 - 24x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{6(x^2+3)\left[(x^2+3) - 4x\right]}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{6(x^2+3)\left[x^2 - 4x + 3\right]}{(x^2+3)^4}$$

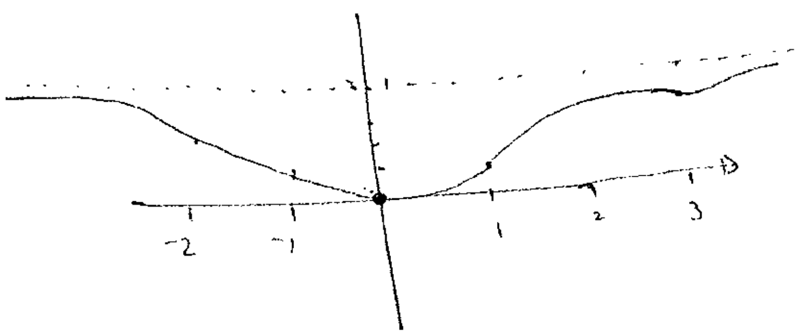
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$\boxed{x=3} \quad \boxed{x=1}$$

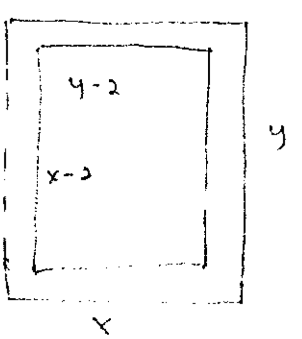
Int	f''	
$(-\infty,1)$	$+$	arriba
$(1,3)$	$-$	abajo
$(3,\infty)$	$+$	arriba

f. Hacer la gráfica.



$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+3}$$

3. Se desea una página rectangular con 30 pulgadas cuadradas de área. Los margenes son de una pulgada en todos lados. Encuentre las dimensiones en la cual se usara el menos papel.



$$A = xy = 30$$

$$y = \frac{30}{x}$$

$$A = (y-2)(x-2)$$

$$= \left(\frac{30}{x} - 2\right)(x-2)$$

$$= \left(30 - \frac{60}{x} - 2x + 4\right)$$

$$= 34 - \frac{60}{x} - 2x$$

$$A'(x) = \frac{60}{x^2} - 2$$

$$\frac{60}{x^2} - 2 = 0$$

$$\frac{60}{x^2} = 2$$

$$x^2 = 30$$

$$x = \sqrt{30}$$

$$\boxed{x = 5.477}$$

$$y = \frac{30}{5.477} \boxed{= 5.477}$$

Universidad de Puerto Rico en Aguadilla
Departamento de Matemáticas

Exam IV
Cálculo I
L12
30 de junio de 2011

Prof. José N. Díaz Caraballo Nombre Clave

Instrucciones. Resuelva cada uno de los ejercicios. *Demuestre todo el procedimiento.* Valor 10 pts c/u.

1. Aplique las reglas de integración básicas.

a. $\int_0^{x^3} \sin t^2 dx$ $= \sin(x^3)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \sin x^6$

b. $\int x\sqrt[3]{1+x^2}dx$ $= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\cdot 3\frac{u^{4/3}}{4} + C = \frac{3}{8}u^{4/3} + C$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

2. .Calcule $\int_0^2 x\sqrt{x+6}dx$ $= \int_6^8 (u-6)\sqrt{u}\, du = \int_6^8 u^{3/2} - 6u^{1/2} du = 2\frac{u^{5/2}}{5} - 2\cdot 6\frac{u^{3/2}}{3}\Big|_6^8$

$u = x+6$ $x = u-6$

$du = dx$

$= \frac{2}{5}u^{5/2} - 4u^{3/2}\Big|_6^8 = \left(\frac{2}{5}(8)^{5/2} - 4(8)^{3/2}\right) - \left(\frac{2}{5}(6)^{5/2} - 4(6)^{3/2}\right)$

3. Encuentre la derivada de

a. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{(x^2+1)}{x} \cdot \left[\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\right] = \boxed{\frac{-x^2+1}{x(x^2+1)}}$

b. $f(x) = x^2 \ln x$

$= 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$

$= 2x\ln x + x$

$u = \cos x \qquad du = -\operatorname{sen} x \, dx$

4. Calcule $\int_0^1 \tan\theta d\theta$ $= -\int_1^{.54} \frac{du}{u} = -\ln|u| \Big|_1^{.54} = -\ln .54 + \ln(1)$

$= .6156$

5. Calcule $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ $\qquad u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}$

$= \int_0^{\ln 2} u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^3}{3}$ //

6.. Calcule la derivada de:

a. $f(x) = e^x \ln x$

$f'(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$

$-3x^{-2}$

b. $f(x) = e^{-3/x^2}$

$f'(x) = e^{-3/x^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{-3}{x^2}\right) = e^{-3/x^2}\left(-3(-2)x^{-3}\right)$

$= \frac{6e^{-3/x^2}}{x^3}$

7. Calcule $\int e^x (e^x+1)^2 du$

$u = e^x + 1$

$du = e^x dx$

$= \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$

$= \frac{(e^x+1)^3}{3} + C$

8. a. Calcule $\int 3^t dt$

$$\frac{3^t}{\ln 3} + C$$

b.Calcule $\int (6^x - 2^x)\, dx$ $=$

$$\frac{6^x}{\ln 6} - \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

9. Calcule la derivada de $f(x) = \log_4(5x+1)$ $=$ $\frac{1}{\ln 4 (5x+1)} \cdot 5 = \frac{5}{(\ln 4)(5x+1)}$

10. Calcule la derivada de $f(x) = \arcsin 3x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11. Una partícula se mueve en una línea la cual su velocidad al tiempo t es $v(t) = t^2 - 3t - 10$ m/s.

a. Encuentre el desplazamiento de la partícula en el periodo $1 \leq t \leq 5$

$$\int_1^5 (t^2 - 3t - 10)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 10t \Big|_1^5 = \left(\frac{5^3}{3} - \frac{3 \cdot 5^2}{2} - 50\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 10\right)$$

$$= \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 50\right) - \left(\frac{2 - 9 - 60}{6}\right) = \left(\frac{250 - 225 - 300}{6}\right) - \left(-\frac{67}{6}\right) = \frac{-275}{6} + \frac{67}{6}$$

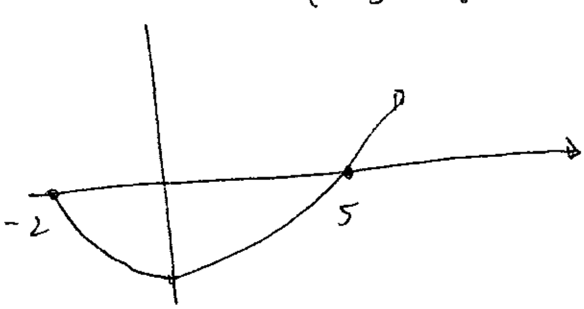
$$= -\frac{208}{6} \simeq -34.67$$

b. Encuentre la distancia viajada durante ese periodo.

$(t-5)(t+2) = 0$

$t = 5 \quad t = -2$

Simplemente es el $|-34.67|$



$= 34.67$