Universidad de Puerto Rico en Aguadilla

# MuPAD para Principiantes

Prof. José Neville Díaz Caraballo

## 1. ¿Qué es MuPAD?

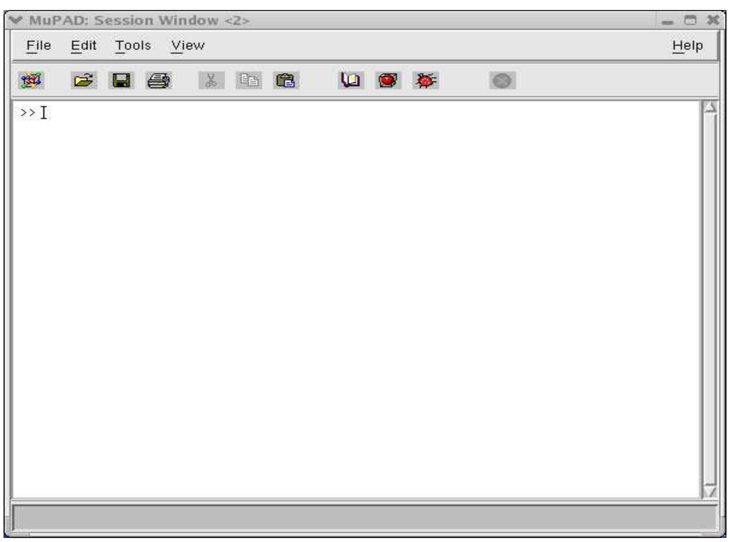
MuPAD es un programado que resuelve problemas simbólicos, numéricos, además de crear gráficas. Existen versiones para Windows, Unix y Linux. Este documento estará presentado en Linux Red Hat 9.0.

## 2. ¿Cómo obtener MuPAD?

**MuPAD** es gratis para uso académico. Para obtener su copia visite http://www.mupad.de/, por favor regístrese.

## 3. Pantalla Inicial

El Programa luce de esta manera:




Los comandos deben ser escritos en la línea de comandos >> . Para ejecutar debes oprimir ¨enter¨ o ¨shift enter¨. Esto depende de cómo lo hayas configurado en el menú de view. MuPAD es sumamente sensitivo con los espacios, así que debes tener cuidado con lo que escribes.

# 4. Operaciones y funciones.

MuPAD utiliza prácticamente los mismos símbolos y operaciones comunes de otros paquetes algebraicos simbólicos o gráficos.

| ***Símbolo*** | ***Significado*** | ***Ejemplo*** | ***Significado*** |
|---|---|---|---|
| + | suma | x+1 | $x+1$ |
| - | resta | x-1 | $x-1$ |
| * | multiplicación(10-x)over(x^2+1) | 3*x | $3\,x$ |
| / | división | x/3 | $x \div 3$ |
| ^ | exponente | x^2 | $x^2$ |
| - | opuesto | -3 | -3 |
| := | asignación | x:=3 | $x=3$ |
| sqrt(expr) | raíz cuadrada | sqrt(x) | $\sqrt{x}$ |
| exp(expr) | exponencial | exp(x) | $e^x$ |
| sin(x) | seno | sin(x-3) | $\sin(x-3)$ |
| cos(x) | coseno | cos(2*x) | $\cos(2\,x)$ |
| tan(x) | tangente | tan(x-1) | $\tan(x)$ |
| ln(x) | logaritmo natural | ln(x+4) | $\ln(x+4)$ |
| abs(x) | valor absoluto | abs(2*x-1) | $\lvert 2\,x-1 \rvert$ |
| int(f,x) | integral | int(x^2,x) | $\int x^2\,dx$ |
| limit(f, $x=x_0$ ) | límite | limit(2*x+1,x=infinity) | $\lim\limits_{x\to\infty} 2\,x+1$ |
| diff(f,x) | derivada | diff(x^2,x) | $\frac{d}{dx}x^2$ |
| solve( $f=0, x$ ) | resolver, raíces | solve $(x^2+3\,x+1=0, x)$ | $x^2+3\,x+1=0$ |
| subs( $f=0, x$ | intercepto en y | subs $(x^2+3\,x+1=0, x)$ | $0^2+3(0)+1=1$ |
| plotfunc3d((f,x=-a..b, y=c..d) | gráfica en 3 dimensiones | plotfunc3d((x+y),x=-5..5, y=-5..5) | f(x,y)=x+y |
| plotfunc2d(f,x=a..b) | gráfica en 2 dimensiones | plotfunc2d(x^2,x=-5..5) | $f(x)=x^2$ |

## 5. ¿Cómo obtener ayuda en MuPAD?

Para solicitar ayuda en MuPAD, desde la linea de comandos >> escriba `?nombre`, por ejemplo >>`?int` abrirá una pantalla con la ayuda que tiene sobre `int` (integral).

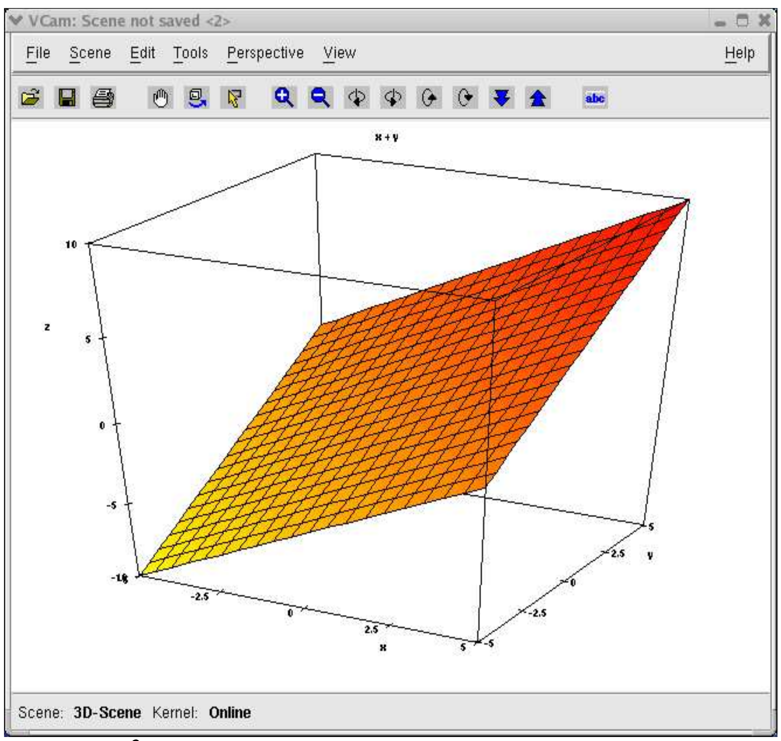
## 6. Ejemplos en MuPAD

Los comandos serán presentados en la letra Nimbus Mono L, por ejemplo `plotfunc2d.`

- *Gráfica de* $f(x,y)=x+y$

```
>> plotfunc3d((x+y),x=-5..5, y=-5..5)
```

`x=-5..5` representa el intervalo que se presentará en la gráfica. Similarmente para `y=-5..5.`




- *Calcular la integral* $\int \sin(x)\,dx$

```
>> int(sin(x),x)
```

```
-cos(x)
```

- *Cálculos de fracciones*

```
>> 1/5 + 2/3 -5
```

```
-62/15
```

- *Cálculo de* $\sqrt{12}$

```
>> sqrt(12)

                                1/2
                             2 3
```

- *Simplificar* $\sin^2(x)+\cos^2(x)$

```
>> simplify((sin(x))^2 +(cos(x))^2)

                                1

>> simplify(sin(x+PI/2))

                               cos(x)

>> simplify(cos(x-PI/2))

                             sin(x)
```

- *Definiendo la función* $f(x)=\dfrac{(x^2-5*x+6)}{(x-1)}$

```
>> f:=(x^2-5*x+6)/(x-1)

                          2
                         x  - 5 x + 6
                         ------------
                            x - 1
```

- *Encontrando las raíces de* $f(x)=\dfrac{(x^2-5*x+6)}{(x-1)}$

```
>> solve(f=0,x)

                             {2, 3}
```

- *Encontrando el intercepto en y* de $f(x)=\dfrac{(x^2-5*x+6)}{(x-1)}$

```
>> subs(f,x=0)

                               -6
```

- *Demuestre que las siguientes funciones son inversas*

$f_1(x)=2x^3-1 \qquad g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)}{2}}$

Recuerde definir f y g

```
>> f1:=2*x^3-1

                              3
                           2 x  - 1

>> g:=((x+1)/2)^(1/3)

                        / x       \1/3
                        | - + 1/2 |
                        \ 2       /

>> subs(f1,x=g)

                                x

>> subs(g,x=f1)

                              3 1/3
                            (x )
```

Observe que obtuvo $\sqrt[3]{x^3}=x$

- *Calculando la derivada*

```
>> f2:=diff(f,x)

                                  2
                    2 x - 5      x  - 5 x + 6
                    ------- -  ------------
                     x - 1                2
                                   (x - 1)
```

- *Buscando los puntos críticos*

```
>> S:=solve(f2=0,x)

                      1/2              1/2
                    {2    + 1, 1 - 2    }
```

- *Calculando la segunda derivada*

```
>> f2:=diff(f,x,x)

                                              2
               2      2 (2 x - 5)     2 (x  - 5 x + 6)
             ----- - ----------- + ----------------
             x - 1             2                  3
                        (x - 1)           (x - 1)
```

```
>> diff(f2,x)
```

```
                                     2
   2       2 (2 x - 5)     2 (x   - 5 x + 6)
----- - ----------- + ----------------
x - 1            2                3
          (x - 1)           (x - 1)
```

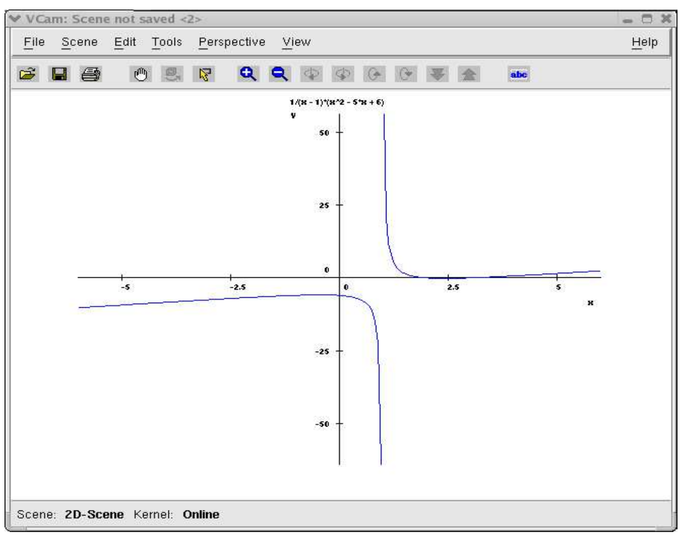
- *Buscando la cuarta derivada*

```
>> diff(f,x $ 4)
```

```
                                          2
   24        24 (2 x - 5)    24 (x   - 5 x + 6)
-------- - ------------ + -----------------
       3              4                    5
(x - 1)        (x - 1)              (x - 1)
```

- *Haciendo la gráfica de* $f(x)=\dfrac{(x^2-5*x+6)}{(x-1)}$

```
>> plotfunc2d(f,x=-6..6)
```




- *Calculando el límite* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10-x}{x^2+1}$

```
>> limit(((10-x)/(x^2+1)),x=infinity)
```

```
                             0
```

- *Definiendo la función* $f(x)=\sin(x)$

```
>> f:=sin(x)

                                  sin(x)
```

- *Derivando* $f(x)=\sin(x)$

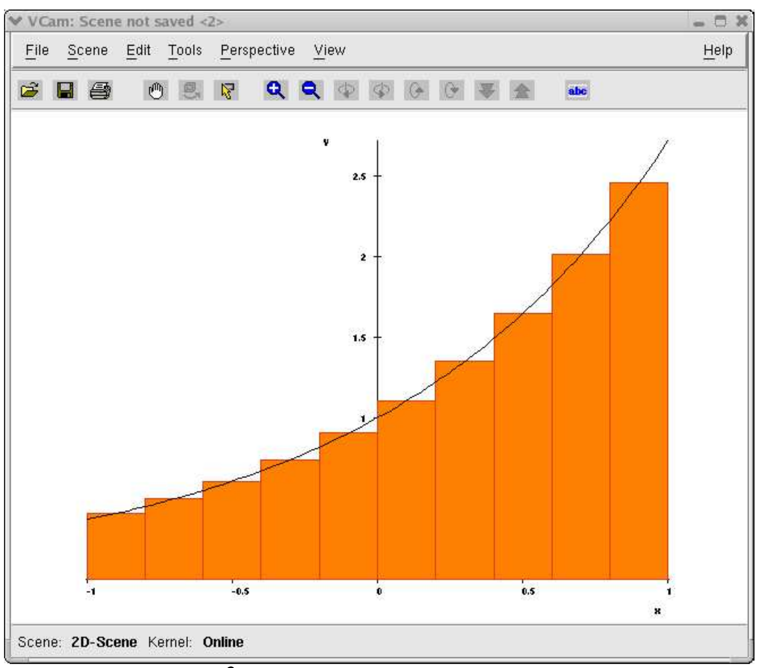
```
>> diff(f,x)

                                  cos(x)
```

- *Calculando la derivada con la definición de límite*

```
>> limit(((sin(x+h)-sin(x))/h),h=0)

                                  cos(x)
```

- *Haciendo la gráfica de* $f(x)=e^{x}$ *y dibujando la aproximación por los intervalos de Riemann*

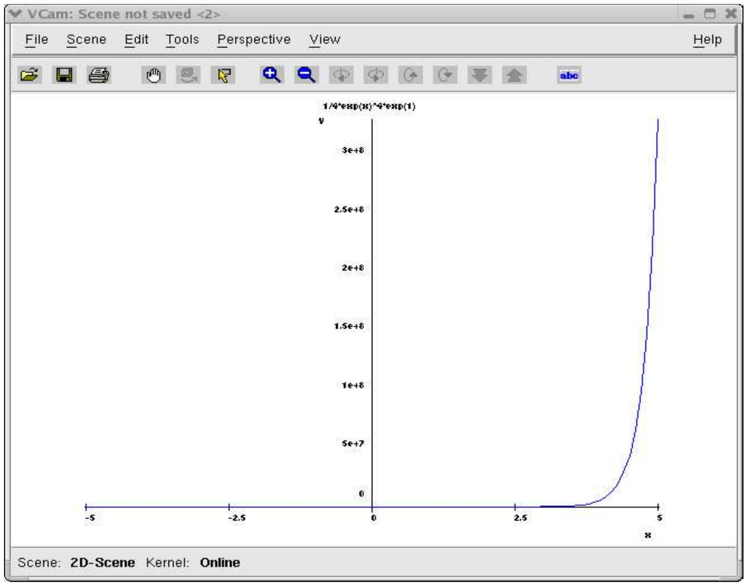
```
>> plot(student::plotRiemann (exp(x),x=-1..1))
>> plot(student::plotRiemann (exp(x),x=-1..1,15))
```




- *Definiendo la función* $g(x)=\int e^{4x+1}\,dx$

```
>> g:=int(exp(4*x+1),x)

        4
   exp(x)  exp(1)
   --------------
        4
```

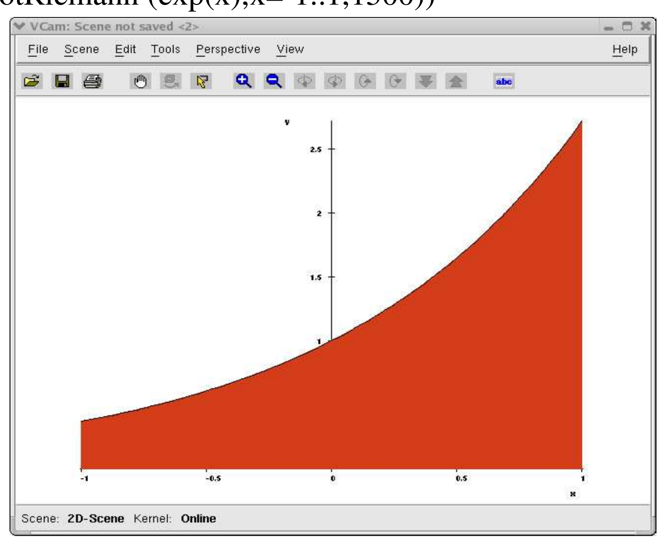
- *Haciendo la gráfica de* $f(x)=\int e^{4x+1}dx$
  >> `plotfunc2d(g,x=-5..5)`




- *Calculando la* $f(x)=\int x\cos x^2 dx$
  >> `F:=int(cos(x^2)*x,x)`

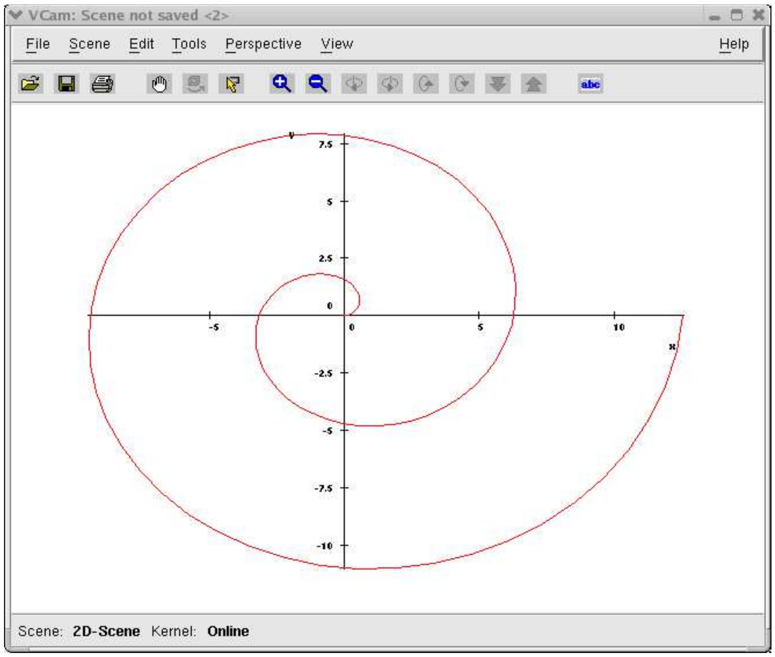
```
        2
   sin(x )
   -------
      2
```

- *Haciendo la gráfica de* $f(x)=e^x$ *y dibujando la aproximación por los intervalos de Riemann, en este caso haremos 1500 intervalos*
  >> plot(student::plotRiemann (exp(x),x=-1..1,1500))



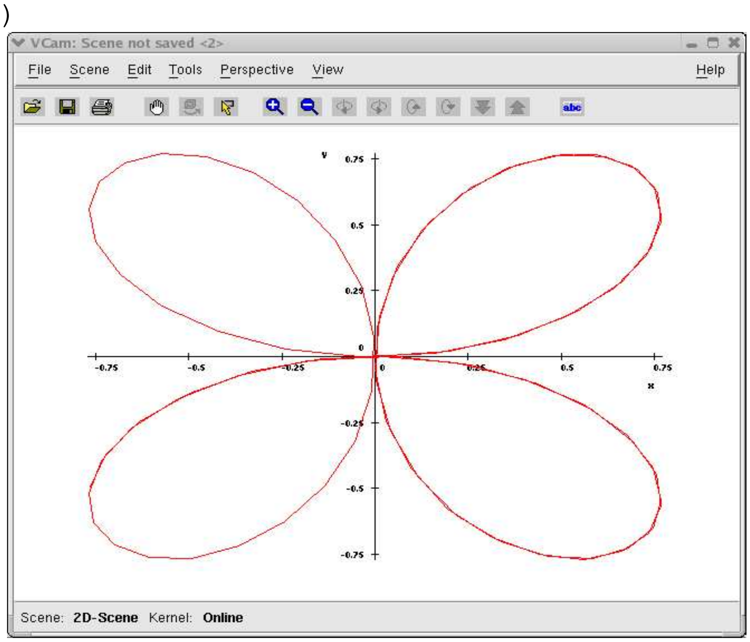
- *Haciendo la gráfica en coordenadas polares de* $r = \theta$

```
>> c:= plot::polar([phi, phi], phi = [0, 4*PI], Grid =
   [100])
  plot::Curve2d([phi cos(phi), phi sin(phi)], phi = 0..4
  PI)
  plot(c)
```




- *Haciendo la gráfica de* $r = \sin(2\theta)$

```
>> plot::polar([sin(2*phi),phi],phi=[0,10])
  plot::Curve2d([cos(phi) sin(2 phi), sin(phi) sin(2
  phi)], phi      = 0..10)
>> plot(c)
```

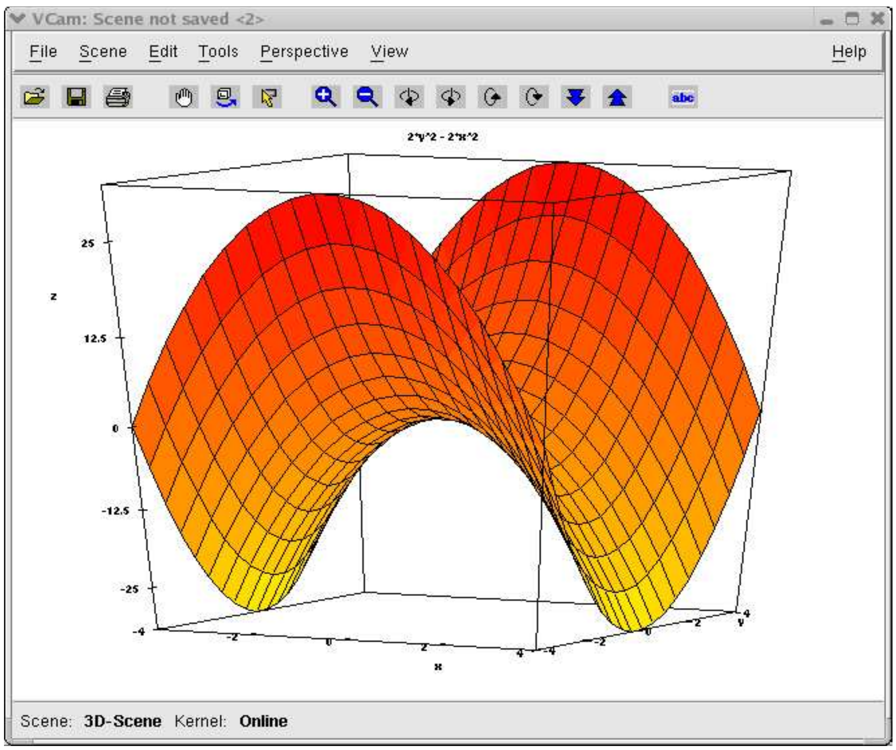


- *Calculando la integral* $\frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(3\cos(3z))^2\,dz$

```
>> F:=.5*int((3*cos(3*z))^2,z=-PI/6..PI/6)

                   0.75PI
```

- *Silla de Montar*

```
>> plotfunc3d(2*y^2-2*x^2,x=-4..4,y=-4..4)
   plotfunc2d(f(x),x=-5..5,Discont=TRUE)
```

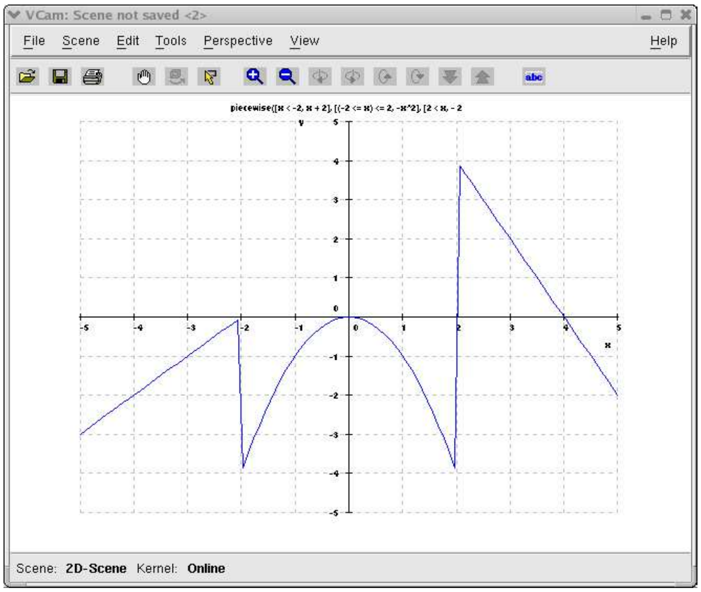



- *Función a trozos* $f(x)=\begin{Bmatrix} x+2 & x<-2 \\ -x^2 & -2\le x\le 2 \\ -2x+8 & x>2 \end{Bmatrix}$

```
f:=piecewise([x<-2,x+2],[-2<=x<=2,-x^2],[x>2,-2*x+8])

                                        2
piecewise(x + 2 if x < -2, - x  if (-2 <= x) <= 2, - 2 x +
8 if 2 < x)
```

- *Haciendo la gráfica* $f(x)$

```
>> f:=piecewise([x<-2,x+2],[-2<=x<=2,-x^2],[x>2,-2*x+8]):
   plotfunc2d(BackGround = RGB::White, ForeGround=
   RGB::Black, GridLines=Automatic,Ticks=[Steps =1, Steps
   =1],f(x),x=-5..5,y=-5..5)
```

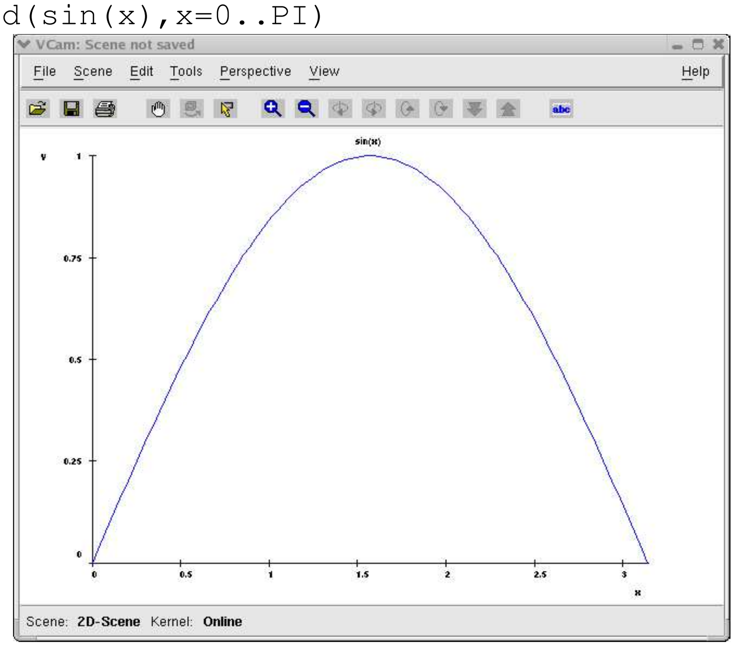



- *Evaluando una función a trozos*

```
>> eval(subs(f(x),x=1))
                                    -1
```

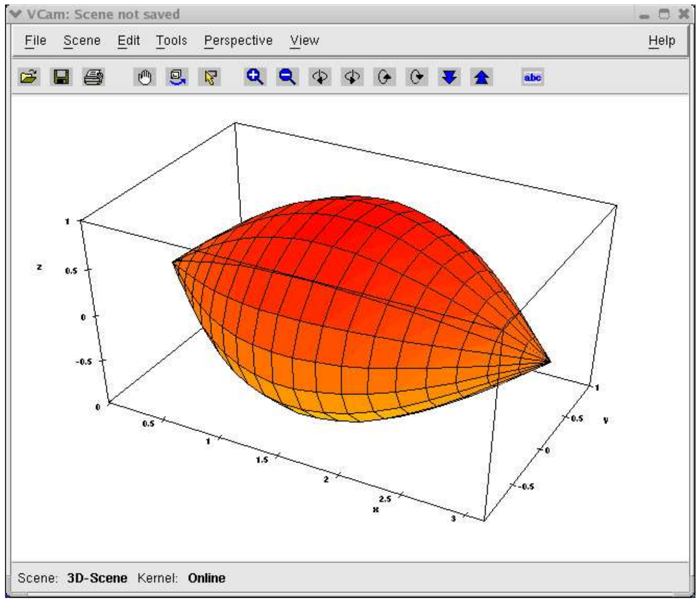
- *Sólidos de revolución. Haremos la gráfica de* $f(x)=\sin(x)$

```
>> plotfunc2d(sin(x),x=0..PI)
```



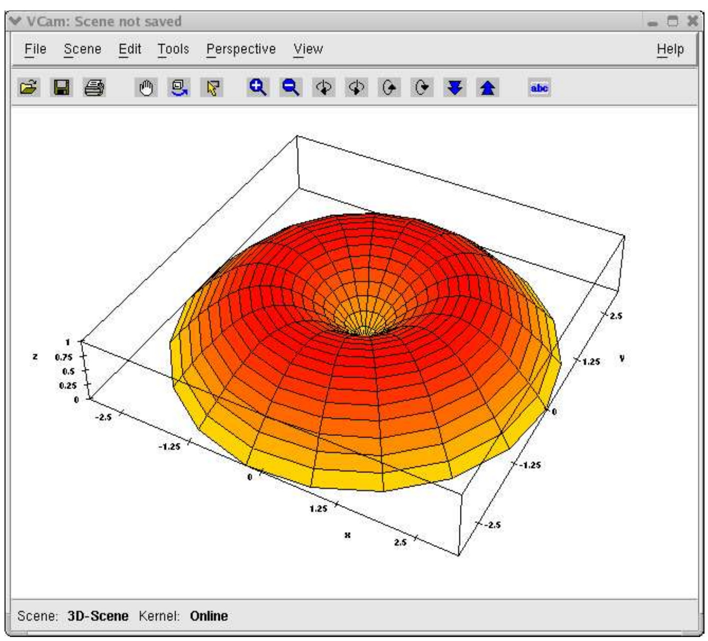
- *Rotando y=sin(x) con respecto al eje de x*

```
>> r:=plot::xrotate(sin(x),x=0..PI)
   plot::Surface3d([x, sin(x) cos(angle4), sin(x) sin
   (angle4)], x = 0..PI,
   angle4 = 0..2 PI)
   >>plot(r)
```




- *Rotando y=sin(x) con respecto al eje de y*

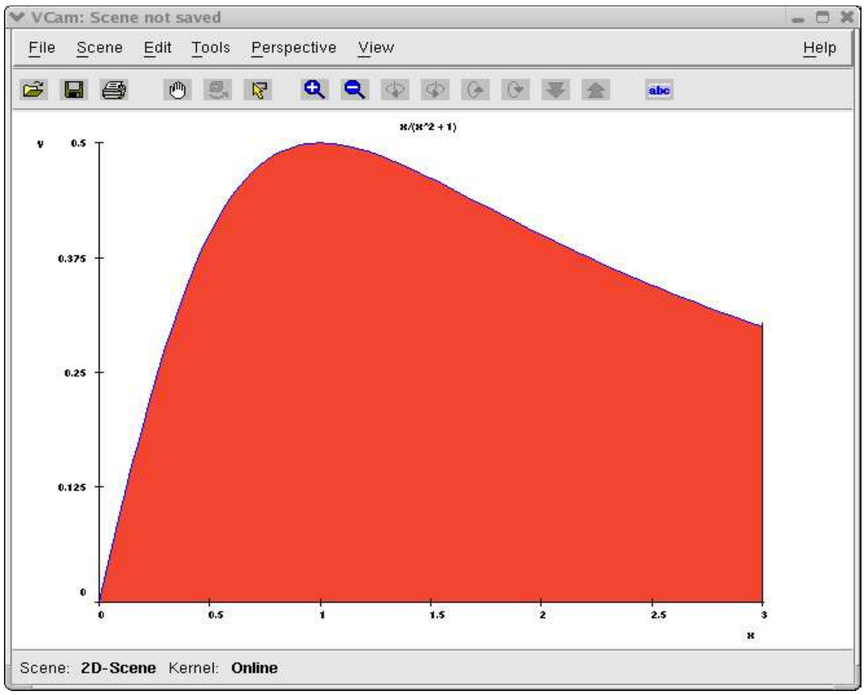
```
>>r2:=plot::yrotate(sin(x),x=0..PI)
plot::Surface3d([x cos(angle7), x sin(angle7), sin(x)], x =
0..PI,angle7 = 0..2 PI)
>>plot(r2)
```



- *Resuelva el siguiente problema de valor inicial* $xy\dfrac{dy}{dx}=1-x\,,\; y(e)=1, x>0$

```
>> eq:=ode({x*y'(x)=1-x,y(e)=1},y(x))
       ode({y(e) = 1, x + x diff(y(x), x) - 1}, y(x))
>> solve(eq)
              {e - x - ln(e) + ln(x) + 1}
```

- *Encuentre el área de las región acotada por* $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ *el eje de x y la linea x=3.*




El área sombreada es la integral definida $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dz$

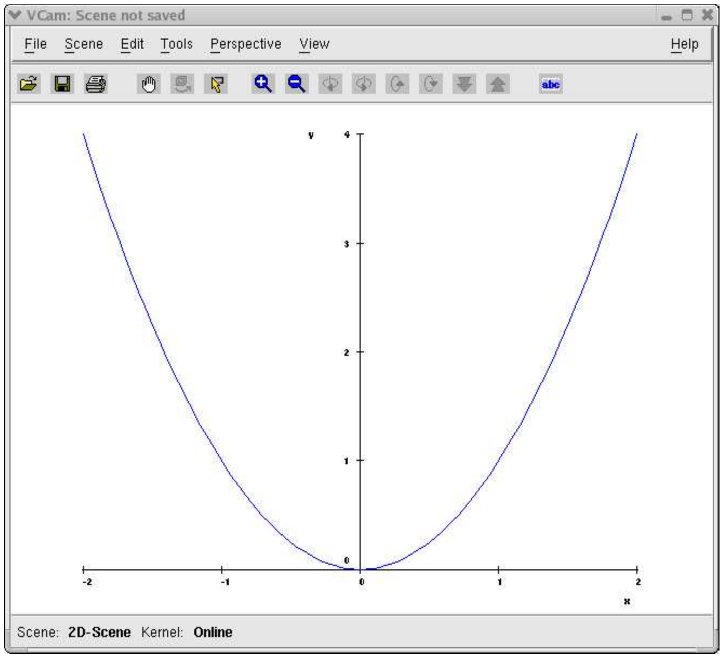
Haciendo la gráfica

```
>> plotfunc2d(x/(x^2+1),x=0..3)
```

Calculando la integral

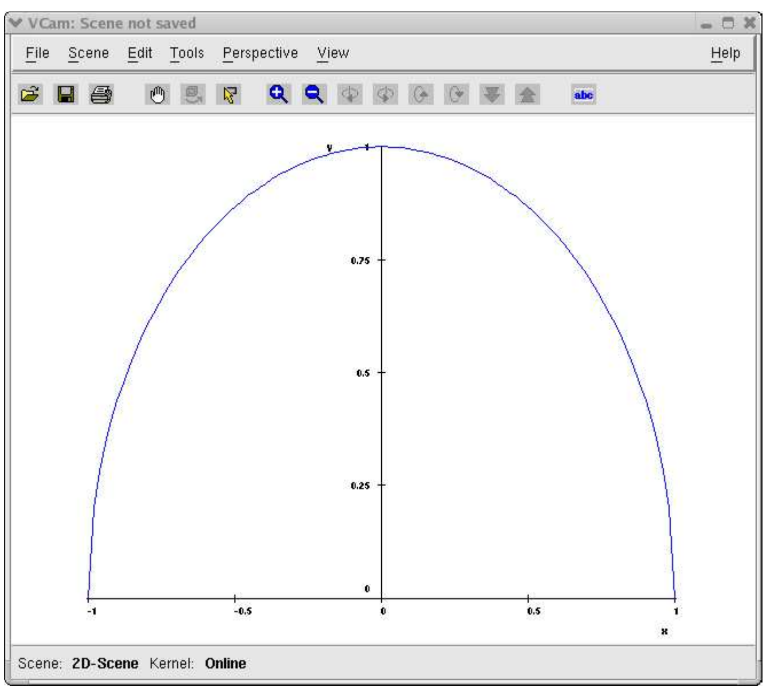
```
>> int(x/(x^2+1),x=0..3)

                              ln(10)
                              ------
                                2
```

- *Haciendo la gráfica de* $y = x^2$ *sin que aparezca el título.*
  >> `plotfunc2d(x^2,x=-2..2,Title="")`




- *Calculando la integral definida* $\int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})\,dx$

  Primero a vamos hacer la gráfica
  >>`plotfunc2d((1-x^2)^(1/2),x=-2..2,Title="")`



El área es $A=\frac{\pi * r^2}{2}$ por ser un semicírculo. Por lo tanto, $A=\frac{\pi * 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$

Ahora apliquemos las técnicas de integración

$$\int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \cos\theta \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\theta)| \cos\theta \, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{1}{2})(1+\cos(2\theta))\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Usando MuPAD

```
>> int((1-x^2)^(1/2),x=-1..1)

                                   PI
                                   --
                                   2
```

- *Calculando la doble integral* $\int\int_R (f(x,y))\, dA$ *donde* $f(x,y)=1-6yx^2$ y

  $R: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$

  $$\int\int_R (f(x,y))\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} 1-6yx^2\, dx\, dy$$

```
>> int(int(1-6*y*x^2,x=0..2),y=-1..1)

                                  4
```

- *Integración por partes. Calcular* $\int x^2 \sin(x)\, dx$

  Primero calcularemos la integral simplemente utilizando el comando `int`, el cual nos dará el resultado final.

```
>> int((x^2)*sin(x),x)

                                              2
                  2 x sin(x) - cos(x) (x  - 2)
```

Aquí utilizaremos integración por partes.

```
>> F:=freeze(int)((x^2)*sin(x),x)

                                 2
                          int(x  sin(x), x)
```

`>> F1:=intlib::byparts(F,x^2)  Esto dice que` $u=x^2$

```
                 3                  /  3              \
                x  sin(x)          | x  cos(x)        |
```

```
    --------- - int| ---------, x  |
        3             \     3        /
```

```
>> simplify(F1)
```

```
                                      2
   2 cos(x) + 2 x sin(x) - x  cos(x)
```

- Calculando la integral $\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x)^3}{\sqrt{sec(x)}} dx$

```
>> F1:=intlib::changevar(hold(int)((tan(x))^3/sqrt(sec
   (x)),x),t=sec(x))
```

```
       /   2          \
       | t  - 1       |
   int| ------, t    |
       |   3/2        |
       \  t           /
```

```
>> subs(F1,t=sec(x))
```

```
        2
    --------- + 2
           2
3 cos(x)
-----------------
/    1      \1/2
| ------     |
\ cos(x)    /
```

Reescribiremos esta respuesta $\dfrac{\frac{2}{3}(sec\,x)^2+2}{(sec\,x)^{(\frac{1}{2})}} = \frac{2}{3}(sec\,x)^{(3/2)}+2(sec\,x)^{(-1/2)}+C$

- *Cómo hacer un programa en MuPAD. En este caso programaremos el Método de Newton.*

```
>> /* This program will apply Newton's Method n times,
      starting with x=x0,
       to approximate a solution of f :=0. */
       newton:=proc(f,range,n)
       local i, x, g, x0;
       begin
       x:=op(range,1);
       x0:=op(range,2);
       g:=x-f/diff(f,x);
       for i from 1 to n do
       x0:=float(subs(g,x=x0));
       print(x0);
       end_for;
       end_proc;
```

Ejecutar >> `newton(sin(x)*cos(x)-cos(x),x=1,10)`

```
1.201384268

1.327407719

1.409348667

1.46339967

1.499267546

1.523130827

1.539025346

1.549617455

1.556677607

1.561384003
```

Encontrando las raíces en el eje de X.

```
>>solve(sin(x)*cos(x)-cos(x)=0,x)

    { 1/2*PI + X7*PI |  X7 in Z_ }
```

Las soluciones son $\frac{\Pi}{2}+n\Pi \qquad n\in Z$

```
integral:=proc(f,a,b,n)
          local i, x0, A;
          begin
          delta:=(b-a)/n;
          A:=0;
          x0:=0;
          for i from 1 to n do
          x0:=(x0+delta);
          g:=f*delta;
          A:=subs(g,x=x0)+A;
          end_for;
          print(A);
          end_proc;
```

Este programa fue creado para demostrar cómo es la programación en MuPAD.
Verifiquemos el valor aproximado de $f(x)=x^2$ en el intervalo (0,1) con n=10

```
>> integral(x^2,0,1,10)

                             77/200
```

Ahora compararemos con los métodos Trapezoide y Simpson.
Primero utilizaremos trapezoide

```
>> student::trapezoid(x^2,x=0..1,10)

   /    2              \
   | i5                |
sum| ---, i5 = 1..9 |
   \ 100               /
--------------------- + 1/20
          10

>> unfreeze(%)

                  67/200
```

Nota: Se utiliza unfreeze(%) para que evalúe la expresión.

Ahora utilicemos Simpson

```
>>student::simpson(x^2,x=0..1,10)

    /   2               \
   | i1                  |         / / i1        \2   \
sum| ---, i1 = 1..4 |   2 sum| | -- - 1/10 | , i1 = 1..5 |
    \  25               /         \ \  5        /      /
-------------------- + ---------------------------------- + 1/30
          15                              15
```

```
>> unfreeze(%)
```

1/3

Para determinar cúal de los métodos es mejor debemos determinar el error

Para ello calcularemos el valor de la integral $\int_0^1 x^2\,dx = x^3|_0^1 = \frac{1}{3}$

Por lo tanto el error en la suma de riemann por la derecha es

$$\left|\left(\frac{1}{3}-\frac{77}{200}\right)\right| = \frac{31}{600} = .05166666667$$

El error en el trapezoide es $\left|\left(\frac{1}{3}-\frac{67}{200}\right)\right| = \frac{1}{600} = .00166666667$

El error en simpson es $\left|\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\right| = 0$

Así que concluimos que **el método Simpson es el mejor**.

- *Integración por sustitución. Calcular la integral* $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$

  Sea $u=\cos(x)$ $du=-\sin(x)\,dx$ entonces $-\int u\,du = -\frac{u}{2}+C$

  $= \frac{-(\cos(x))}{2}+C$

  Defina una función F2 que será la integral anterior, donde el ususario indica el cambio de variable

```
>> F2:=intlib::changevar(hold(int)(sin(x)*cos(x),x),t=cos
(x))

                              int(-t, t)
>> simplify(F2)

                                  2
                                 t
                              - --
                                 2

>> subs(F2,t=cos(x))

                                    2
                             cos(x)
                           - -------
                                 2
```

```
>> diff(subs(F2,t=cos(x)),x)

                                        cos(x) sin(x)
```

Utilicemos el cambio de variable t=sin(x)

```
>> F3:=intlib::changevar(hold(int)(sin(x)*cos(x),x),t=sin
(x))

                                          int(t, t)
>> simplify(F3)

                                             2
                                            t
                                            --
                                             2
>> subs(F3,t=sin(x))

                                                2
                                          sin(x)
                                          -------
                                             2
>> diff(subs(F3,t=sin(x)))

                                                2
                                          sin(x)
                                          -------
                                             2
>> diff(subs(F3,t=sin(x)),x)

                                        cos(x) sin(x)
```

- *Calculemos la sumatoria* $\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{i}$

```
>> f:=(1/2)^x

                                               x
                                          (1/2)


>> sum(f,x=0..infinity)

                                             2
```

- *Calculemos la siguiente* $\sum_{i=3}^{\infty}(\frac{1}{2})^{i}$

>> sum(f,x=3..infinity)

```
1/4
```

- Calculemos la descomposición por fracciones parciales de $f = \dfrac{1}{x^2+5x+6}$

>> f:=1/(x^2-5*x+6)

```
      1
------------
 2
x  - 5 x + 6
```

>> partfrac(f)

```
  1         1
----- - -----
x - 3   x - 2
```

## 7. Referencias

**MuPAD- Apractical Guide, Kai Gehrs & Frank Postel.**
**Calculus Seventh Edition, Larson, Hostetler & Edwards. Houghton Mifflin.**
**http://faculty.prairiestate.edu/skifowit/htdocs/classes/mupad.htm**
**http://faculty.prairiestate.edu/skifowit/htdocs/classes/mupad2.htm**
**http://faculty.prairiestate.edu/skifowit/htdocs/classes/mufails.htm**
**http://faculty.prairiestate.edu/skifowit/htdocs/classes/m172.htm**
**http://www.sciface.com/STATIC/DOC30/eng/tutorium.html**