# RESUMEN DE RESULTADOS IMPORTANTES ACERCA DE SUCESIONES Y SERIES

MATE 3032 - DR. UROYOÁN R. WALKER

## 1. Sucesiones

**Teorema 1.1.** Sucesiones monotónicas acotadas convergen.

**Ejemplo 1.2.** Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geqslant 1$. Se puede verificar fácilmente que $\{a_n\}$ es acotada y creciente (ver notas de la clase). Por el teorema 1.1, $\{a_n\}$ es convergente.

**Teorema 1.3** (Teorema del Sandwich)**.** Suponga que las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para toda $n$
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

**Ejemplo 1.4.** Sea $b_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Esta sucesión se puede pillar entre las sucesiones $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ y $c_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, que convergen a 2. Por el teorema del Sandwich, la sucesión $b_n$ también converge a 2.

## 2. Series

**Teorema 2.1.** Si la serie $\sum a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. De igual manera, si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiende a cero, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

**Ejemplo 2.2.** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverge, pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$.

**Teorema 2.3** (Teorema de la Serie Geométrica)**.** La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si y solo si $|r| < 1$. Para $|r| < 1$, la suma de la serie está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

**Ejemplo 2.4.** La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge, y suma $3/2$.

## 3. Series de Términos Positivos

**Teorema 3.1** (Prueba de la Integral)**.** Sea $f(x)$ una función continua y positiva en el intervalo $[1,\infty)$ y fije $a_n = f(n)$ para todo entero $n \geqslant 1$. Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ converge si y solo si $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

**Ejemplo 3.2.** La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge a $\pi/4$ (¡ Verificalo!). Por el teorema 3.1, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ converge.

**Teorema 3.3** (Teorema de las $p$-series)**.** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.

**Ejemplo 3.4.** La serie harmónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, mientras que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

**Teorema 3.5** (Estimado del Residuo)**.** Sea $f(x)$ una función como la del teorema 3.1 y suponga que la integral $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Fije $a_k = f(k)$ y sea $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Entonces

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S - S_n \leqslant \int_n^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Teorema 3.6** (Prueba de la Comparación)**.** Sean $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series cuyos términos son positivos. Entonces

(1) Si $a_n \leqslant b_n$ para toda $n$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

(2) Si $a_n \geqslant b_n$ para toda $n$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

**Ejemplo 3.7.** Tenemos $\dfrac{n}{n^2+1} \geqslant \dfrac{1}{2n}$ para todo $n$ (¡Verifique!). Como la serie $\sum \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2} \sum \dfrac{1}{n}$ diverge, la serie $\sum \dfrac{n}{n^2+1}$ tine también que ser divergente.

**Teorema 3.8** (Teorema de la Comparación de Límites)**.** Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos positivos. Suponga que la sucesión $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un límite $L \neq 0$. Entonces ambas series convergen o ambas series divergen.

**Ejemplo 3.9.** Sea $a_n = \dfrac{2n^3+1}{n^5}$ y sea $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Se puede verificar fácilmente que (Ejercicio) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 2 \neq 0$. Como $\sum b_n$ converge (es una $p$-serie con $p = 2$, entonces $\sum a_n$ también converge.

## 4. Serie Alterna

**Teorema 4.1** (Prueba de la Serie Alterna)**.** Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que satisface las siguientes condiciones:

(1) $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$ para todo $n$.
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces la serie alterna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

**Ejemplo 4.2.** La serie harmónica alterna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

**Teorema 4.3** (Error Estimado para Series Alternas)**.** Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que satisface las condiciones del teorema 4.1. Sea $S$ la suma de la serie y sea $S_n$ la $n$-ésima suma parcial de la serie. Entonces

$$|S - S_n| < a_{n+1}$$

para toda $n$.

## 5. Convergencia Absoluta

**Teorema 5.1** (Teorema de la Convergencia Absoluta)**.** Si la serie $\sum |a_n|$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ converge.

**Ejemplo 5.2.** Sea $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$. Tenemos $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Entonces, por el teorema 3.6 la serie $\sum |a_n|$ converge. Por el teorema 5.1 la serie $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2}$ converge también.

**Teorema 5.3** (Prueba de la Razón)**.** Suponga que el límite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existe o es infinito.

(1) Si $\rho < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente.
(2) Si $\rho > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.
(3) Si $\rho = 1$, entonces la prueba es inconclusa.

**Ejemplo 5.4.** Sea $a_n = \dfrac{n}{2^n}$. Entonces $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2n}$. Tenemos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1/2 < 1$ (¡ Verifícalo!). Por el teorema 5.3, la serie $\sum_n \dfrac{n}{2^n}$ es convergente.

**Teorema 5.5** (Prueba de la Raiz)**.** Suponga que el límite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

existe o es infinito.

(1) Si $\rho < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente.
(2) Si $\rho > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.
(3) Si $\rho = 1$, entonces la prueba es inconclusa.

**Ejemplo 5.6.** Sea $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}$. Entonces $|a_n|^{1/n} = \left(\dfrac{1}{3}\right) n^{2/n}$. Tenemos $\lim_{n\to\infty} n^{2/n} = 1$ (¡ Verificalo!), así $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1/3 < 1$. Por el teorema 5.5, la serie $\sum \dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}$ es absolutamente convergente.

## 6. Series de Potencia

**Teorema 6.1.** Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias. Hay solamente tres posibilidades:

(1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge solo cuando $x = a$.

(2) Existe un número $R > 0$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es absolutamente convergente para $|x-a| < R$ y divergente para $|x-a| > R$.

(3) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge para toda $x$.

El número $R$ de (2) se llama el *radio de convergencia* de la serie. En el caso (1), es decir, cuando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge solo para $x = a$, se dice que el radio de convergencia es 0, y en el caso (3) - cuando la serie converge para toda $x$ - decimos que el radio de convergencia es infinito.

**Ejemplo 6.2.** (1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ converge solo para $x = 0$, así que su radio de convergencia es $R = 0$.

(2) La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es absolutamente convergente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$ ; entonces su radio de convergencia es $R = 1$.

(3) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente para toda $x$; su radio de convergencia es infinito.

La Prueba de la Razón se puede utilizar con bastante frecuencia para calcular el radio de convergencia. Resumimos el procedimiento en el siguiente teorema.

**Teorema 6.3.** Suponga que la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es tal que

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

existe o es infinito. Entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es $R = \frac{1}{L}$ (con las convenciones de que $R = 0$ si $L = \infty$ y $R = \infty$ si $L = 0$.)

Este teorema se puede demostrar fácilmente utilizando el teorema 5.3 con $a_n = c_n(x-a)^n$. Notese que en este caso $\rho = L\,|x-a|$.

**Ejemplo 6.4.** Considere la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$. Aquí $c_n = \frac{1}{2^n n}$, entonces $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$, entonces el radio de convergencia de esta serie es $R = 1/L = 2$.

**Teorema 6.5.** Suponga que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ ($R = \infty$ es posible). Defina $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ para $|x-a| < R$. Entonces

(1) $f(x)$ es diferenciable y $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

(2) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n-1}\right) + C$

(3) Las series en (1) y (2) también tienen radio de convergencia $R$.

**Ejemplo 6.6.** Diferenciando la serie geométrica $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ obtenemos la identidad $\frac{1}{(1-x)2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$. Integrando la serie geométrica tenemos $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (la constante de integración se verifica fácilmente que es cero si se toma $x = 0$). Estas nuevas series heredan el radio de convergencia de la serie geométrica $R = 1$.

**Teorema 6.7.** Suponga que una función $f(x)$ tiene representación en series de potencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

para $x$ en un intervalo abierto que contenga a $a$. Entonces los coeficientes $c_n$ de la serie están dados por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Notese que por el teorema 6.5 $f(x)$ es infinitamente diferenciable. La fórmula de arriba se obtiene aplicando el teorema 6.5 (Parte 1) $n$ veces para hallar $f^{(n)}(x)$ y tomando $x = a$.

Una consecuencia inmediata e importante del teorema 6.5 es:

**Corolario 6.8.** Si una función $f(x)$ tiene una representación de series de potencias en $a$, esta representación es única.

**Definición 6.9.** Sea $f(x$ una función tal que $f^{(n)}(a)$ existe para todo $n$. Entonces la *Serie de Taylor* de $f(x)$ en $a$ es la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Si $a = 0$ la serie se llama la *Serie de MacLaurin* de $f(x)$.

**Ejemplo 6.10.** La serie de Taylor de $f(x) = e^x$ en 0 es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$. Observe que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para toda $n$.

La pregunta fundamental de las series de Taylor es si convergen a la función. Hay ejemplos (vea notas de la clase) para el cual este no es el caso. Para estudiar estas preguntas de convergencia, se introducen los polinomios de Taylor, que son sumas parciales de las series de Taylor.

**Definición 6.11.** Asumiendo que todas las derivadas de orden hasta $n$ de $f(x)$ existen en $a$, definimos el $n$-ésimo polinomio de Taylor como la suma

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

El $n$-ésimo residuo de Taylor como la diferencia

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Una consecuencia inmediata de esta definición es que la serie de Taylor de $f(x)$ en $a$ converge a $f(x)$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

**Teorema 6.12** (Teorema de Taylor)**.** Si $f(x)$ tiene derivadas de orden hasta $n+1$ en un intervalo abierto $I$ que contiene a $a$, entonces para $x$ en $I$, $x \neq a$, existe un número $z$ con $|z-a| < |x-a|$ tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

**Comentario 1.** Observe que para $n = 0$, el teorema de Taylor es equivalente al teorema del valor medio.

En muchos ejemplos uno utiliza el Teorema de Taylor para demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

**Ejemplo 6.13.** Sea $f(x) = \cos(x)$ y sea $a = 0$. Como $f^{(n+1)}(z) = \pm\text{sen}(z)$ ó $f^{(n+1)}(z) = \pm\cos(z)$, dependiendo de la paridad de $n$, tenemos $\left|f^{(n+1)}(z)\right| \leqslant 1$, entonces, por el teorema de Taylor

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \tag{1}$$

Observe que $\dfrac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$ es el $(n+1)$-ésimo término de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$, que sabemos que converge para todo $x$. El término general de cualquier serie convergente tiene que tender a 0 (teorema 2.1), así $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$. Por la desigualdad de arriba 1 tenemos $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Por lo tanto la serie de MacLaurin de $\cos x$ converge a $\cos x$ para toda $x$. Uno puede determinar la serie mediante un cálculo directo usando (vea las notas de la clase):

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$