Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Matemáticas
MATE 3032 **1er Examen Parcial**
Primer Semestre 2001-2002
12 de septiembre de 2001

I. Escoja la contestación correcta.

1. Halle el valor de la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a : $-\pi/2$ **b** : 0

c : $\pi/4$ **d** : $\pi/8$

Podemos verificar facilmente que $\dfrac{\tan x}{1+x^2}$ es una función impar. Entonces $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathbf{0}$

2. Halle el valor de la integral $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}x$.

a : $e^4 - e^2 + 1$ **b** : $\frac{1}{2}\sqrt{e}$

c : 1 **d** : $e^2 + 1$

Por medio de integración por partes $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$, entonces $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}x = \mathbf{e}^2 + 1$

3. Evalue la integral impropia $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-2}\,\mathrm{d}x$.

a : 1 **b** : 2

c : $1/4$ **d** : Divergente

Esta integral es divergente puesto que $y = \frac{1}{x^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$ y es **divergente** pues

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

II. Trabaje cada problema. Asegurese de mostrar su trabajo.
Respuestas sin justificación no serán tomadas en cuenta.

4. Evalue la integral impropia $\int_1^{\infty} 2x^{-4}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} 2x^{-4}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} 2x^{-4}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-2}{3}x^{-3}\Big]_1^t \\
&= \frac{-2}{3}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^3}-1\right) \\
&= \frac{-2}{3}
\end{aligned}$$

5. $\int_3^4 \frac{3x}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

Este problema es más fácil resolverlo por el método de fracciones parciales, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} &\implies 3x = A(x+1)+B(x-2) \\
&\implies 3x = (A+B)x + A - 2B \\
&\implies A+B=3 \quad \text{y} \quad A-2B=0 \\
&\implies A=2 \quad \text{y} \quad B=1 \\
&\implies \frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \frac{3x}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x &= \int_3^4 \frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln|x-2| + \ln|x+1|\Big]_3^4 \\
&= 2\ln 2 + \ln 5 - (2\ln 1 + \ln 4) \\
&= \ln 4 + \ln 5 - 2\cdot 0 - \ln 4 \\
&= \ln 5
\end{aligned}$$

6. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Aquí utilizamos el método de substitución con $u = \operatorname{sen}^{-1}x$, entonces $\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ y tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{\text{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/6} u\,\mathrm{d}u \\
&= \left.\frac{u^2}{2}\right]_0^{\pi/6} \\
&= \frac{(\pi/6)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{72}
\end{aligned}$$

7. (a) Use integración por partes para demostrar la fórmula de reducción:

$$\int x^n \cos x\,\mathrm{d}x = x^n \text{sen}\,x - n\int x^{n-1}\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x$$

Utilizamos integración por partes con $u = x^n$ y $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$. Tenemos entonces que $\mathrm{d}u = nx^{n-1}$ y $v = \text{sen}\,x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int x^n \cos x\,\mathrm{d}x &= x^n \text{sen}\,x - \int nx^{n-1}\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x \\
&= x^n \text{sen}\,x - n\int x^{n-1}\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(b) Use la fórmula de la parte (a) para evaluar $\int x^4 \cos x\,\mathrm{d}x$.

Por la parte (a) del problema tenemos

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x\,\mathrm{d}x &= x^2 \text{sen}\,x - 2\int x\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x \\
&= x^2 \text{sen}\,x - 2(-x\cos x + \text{sen}\,x) \\
&= x^2 \text{sen}\,x + 2x\cos x - 2\text{sen}\,x + C
\end{aligned}$$

8. Una población de abejas aumentó a razón de $r(t)$ abejas por semana, donde t denota tiempo en semanas. La gráfica de r se muestra abajo. Utilice el método de Simpson con 6 subintervalos para aproximar el aumento poblacional de las abejas en las primeras 24 semanas.

El aumento poblacional de las abejas en las primeras 24 semanas está dado por

$$\int_0^{24} r(t)\,\mathrm{d}t \approx S_n$$

Para una función $y = r(t)$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, el Método de Simpson es

$$S_n = \frac{\Delta t}{3}\Big[r(t_0) + 4r(t_1) + 2r(t_2) + 4r(t_3) + \cdots + 2r(t_{n-2}) + 4r(t_{n-1}) + r(t_n)\Big]$$

donde $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ y $t_i = a + i\Delta t$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

En nuestro caso $n = 6$, así que tenemos $\Delta t = \frac{24-0}{6}$ y $t_i = 4i$. Es decir tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^{24} r(t)\,\mathrm{d}t &\approx S_6 \\
&= \frac{\Delta t}{3}\Big[r(t_0) + 4r(t_1) + 2r(t_2) + 4r(t_3) + 2r(t_4) + 4r(t_5) + r(t_6)\Big] \\
&= \frac{4}{3}\Big[r(0) + 4r(4) + 2r(8) + 4r(12) + +2r(16) + 4r(20) + r(24)\Big] \\
&\approx \frac{4}{3}\Big[0 + 4(500) + 2(3000) + 4(11000) + 2(4000) + 4(500) + 0\Big] \\
&= \frac{4}{3}(62000) \\
&\approx 82,666 \quad \text{abejas}
\end{aligned}$$