Encuentre una familia de curvas ortogonales a la siguiente familia de curvas $2x^2 - 3y^2 = C$.
Solución:

La derivada de $2x^2 - 3y^2 = C$ es $4x - 6y\dfrac{dy}{dx} = 0$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y}$ debe satisfacer

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3y}{2x}$ luego $\dfrac{dy}{3y} = -\dfrac{dx}{2x}$ lo cual es una ecuación diferencial separable

$$\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|x| = c_1$$

$$\ln|y|^{1/3} + \ln|x|^{1/2} = c_1$$

$\ln\left|y^{1/3}x^{1/2}\right| = c_1$ aplicando exponencial tenemos

$y^{1/3}x^{1/2} = C$ Familia de curvas ortogonales

Verificar para el otro lado

$y^{1/3}x^{1/2} = C$ la derivada es $\dfrac{1}{3}y^{-2/3}y'x^{1/2} + \dfrac{1}{2}y^{1/3}x^{-1/2} = 0$ entonces

$$\frac{1}{3}y^{-2/3}y'x^{1/2} = -\frac{1}{2}y^{1/3}x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}y^{1/3}x^{-1/2}}{\frac{1}{3}y^{-2/3}x^{1/2}} = \frac{-\frac{1}{2}y}{\frac{1}{3}x} = \frac{-3y}{2x}$$

Asi que debe satisfacer

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y}$ luego

$3ydy = 2xdx$ ecuacion diferencial separable asi que, $\int 3ydy = \int 2xdx$

$\dfrac{3y^2}{2} = x^2 + C$ entonces $\dfrac{3y^2}{2} - x^2 = C$ multiplicando por -2 tenemos

$$2x^2 - 3y^2 = C$$