

8.6 Representación de series por series de Potencias

Objetivos: Conocer como representar ciertos tipos de funciones como sumas de series de potencia, manipulando series geométricas o diferenciando o integrando tales series. Esta estrategia es beneficiosa para integral o diferencial funciones que no conocemos o que su antiderivada es complicada. Los científicos las utilizan al programas calculadoras y computadoras.

Recordar que (1) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Ahora si consideramos $f(x) = \frac{1}{1-x}$ entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

1. Ejemplo: Expresar $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ como la suma de una serie de potencia y encuentre el intervalo de convergencia.

Solución:

Sustituya x por x^2 en (1) tenemos

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1)^n x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

como esta serie es una geométrica converge cuando $|x^2| < 1$ esto es $x^2 < 1$ ó $|x| < 1$. Luego el intervalo de convergencia es $(-1,1)$.

Nota: Se pudo utilizar la prueba de la razón pero es innecesario

2. Ejemplo: Encuentre una serie de Potencia para representar $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Solución: $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2 + x} = \frac{1}{-2(1 - \frac{x}{2})} = \frac{1}{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n x^n}{2^{n+1}}$

Esta serie converge si $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ esto es $|x| < 2$ así que el intervalo de convergencia es $(-2,2)$.

3. Ejemplo: Encuentre una serie de potencia para la representacion de $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}$

Solución:

$$\frac{x^3}{x^2 - 2} = x^3 \cdot \frac{1}{x^2 - 2} = x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n x^{2n}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n x^{2n+3}}{2^{n+1}}$$

Diferenciación e Integración de Series de Potencias

Teorema: Si la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tiene un radio de convergencia $R > 0$ entonces la

function definida por $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es diferenciable

(entonces continua) en un intervalo $(a-R, a+R)$ y

$$a) f'(x) = c_1 + c_2(x-a) + c_3(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$b) \int f'(x) = C + c_0(x-a) + c_2 \frac{(x-a)^2}{2} + c_3 \frac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^n}{n+1}$$

El radio de convergencia de la serie de potencia en la ecuación a) y b) son ambos R .

4. Ejemplo: Expresar $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ como una serie de potencia

Solución:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

5. Ejemplo: Encuentre una representación en serie de potencia para $\ln(1-x)$ y su radio de convergencia.

Solución: Note que con la excepcion de -1 , la derivada de esta function es $\frac{1}{1-x}$. Asi que integrando en ambos lados

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

Para determinar el valor de C, sea $x=0$ en esta ecuación y obtenemos $\ln(1+0) = C$. Luego $C = 0$

$$\text{y } \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

El radio original de convergencia es el mismo que el de la serie original.

$$\text{Una Aplicación si } x = \frac{1}{2}; \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \quad \text{entonces}$$

$$\text{Por lo tanto } \ln 2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

6. Ejemplo: Encuentre la representación en series de potencia para $f(x) = \tan^{-1}(x)$

Solución : Observe que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y encontrar la serie es solo la integral de la serie de potencia

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ ver ejemplo 1.}$$

$$f(x) = \tan^{-1}(x) = \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \right) dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots =$$

sea $x=0$ $f(0) = \tan^{-1}(0) = C$ entonces $C = 0$

Así que

$$f(x) = \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{el radio de convergencia es 1 ¿porque?}$$