5.1 Números Reales

Mate 3041

Milena Salcedo V

R

Números Reales

- **Números Naturales:**

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$$

- **Números Enteros no negativos (Cardinales):**

$$\{0,1,2,3, \dots\}$$

- **Números Enteros:**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$$

Números Reales

- **Números Racionales “$\mathbb{Q}$“**

$$r = \frac{a}{b}$$

donde a and b son enteros y $b \neq 0$. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} \qquad -\frac{3}{7} \qquad 25 = \frac{25}{1} \qquad 0.17 = \frac{17}{100}$$

(Sabemos que no es posible dividir un número entre cero. Expresiones como $\frac{5}{0}, \frac{0}{0}$ no están definidas)

Números Reales

- **Números Irracionales:**

  No pueden expresarce como una razón de enteros.

  Son expresiones decimales infinitas no periodicas.

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{7} \qquad \sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

Números Reales

Cada número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su decimal correspondiente se repite. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \frac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

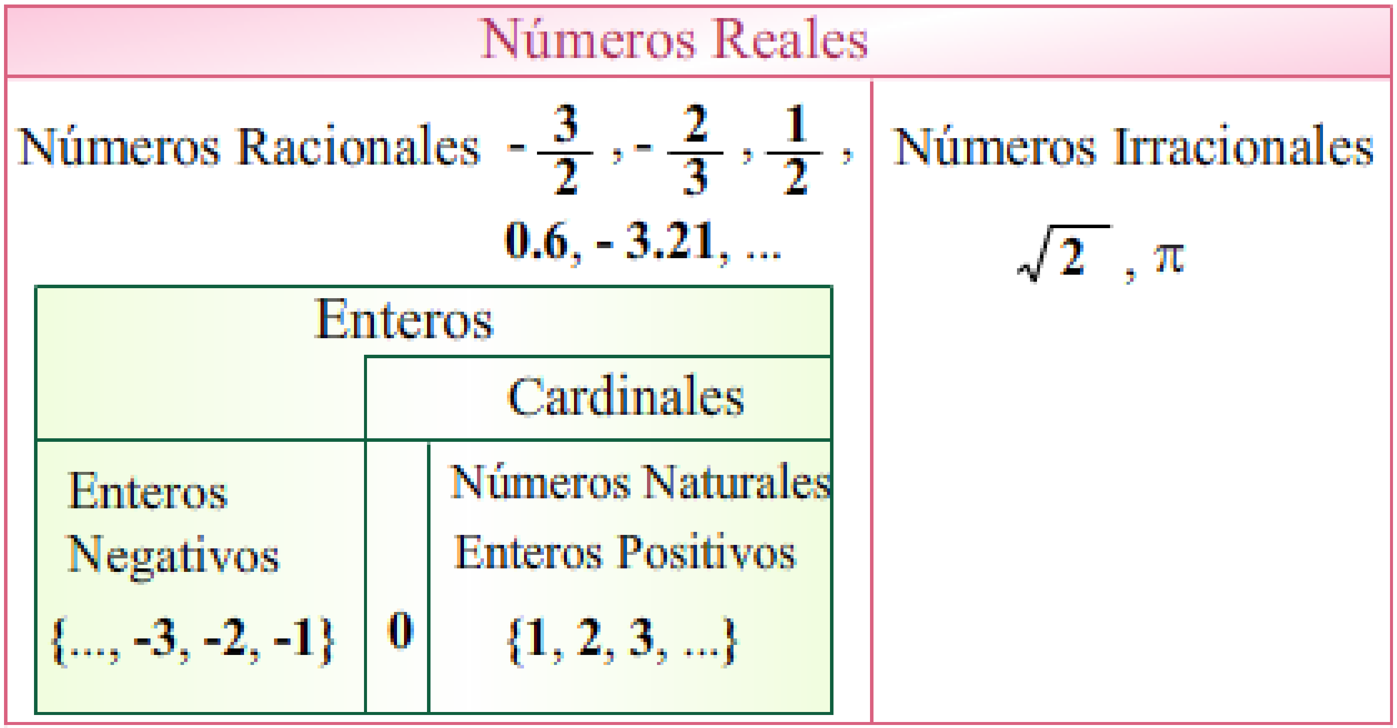
$$\frac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \frac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la secuencia de dígitos que se repite siempre.) Si el número es irracional, la representación decimal es infinita no repetitiva:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \quad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Números Reales

Los números Reales se denotan con la letra “ℝ”

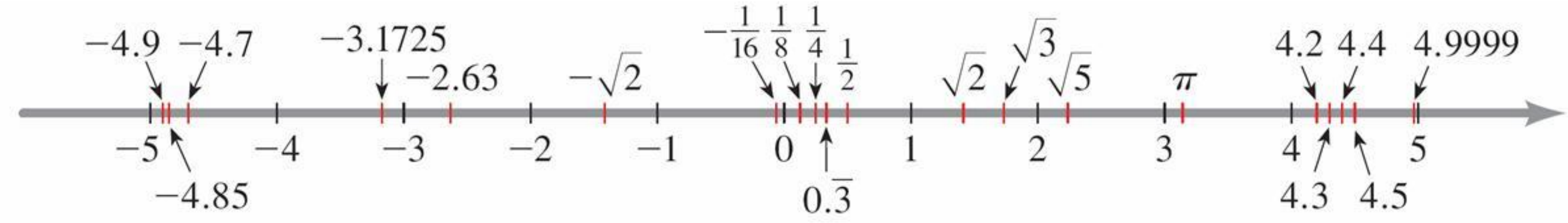


El sistema de los números Reales

La Recta Real

La recta Real

Los números reales se representan en la recta numérica,



Ejemplo– *Clasificando números Reales*

Determine cuáles números pertenecen a el conjunto de:

$$\left\{-13,\ -\sqrt{5},\ -1,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{5}{8},\ \sqrt{2},\ \pi,\ 7\right\}$$

(a) Números naturales, (b)Whole numbers (c) Números enteros, (d) Números racionales, y (e) Números irracionales.

Solución:

a. Números naturales : $\{7\}$
b. Números Enteros no negativos: $\{0,7\}$

Ejemplo– *Solución*

cont'd

b. Enteros: {–13, –1, 0, 7}

c. Números racionales: $\left\{-13, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, 7\right\}$

d. Números irracionales: $\{-\sqrt{5}, \sqrt{2}, \pi\}$

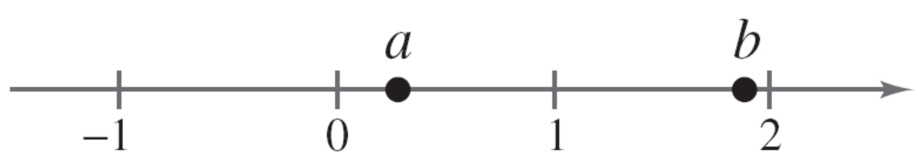
Ordenando Números Reales

Ordenando Números Reales

Sean *a* y *b* dos números reales, *a* es menor que *b* si *b*-*a* es positivo. El orden de *a* y *b* es denotado por la inecuación $a<b$ o bien $b>a$.

La inecuacion $a \leq b$ significa que *a* es menor o igual a *b*, y la inecuacion $b \geq a$ significa que *b* es mayor o igual que *a*.

Los simbolos $<, >, \leq, \geq$ son simbolos de inecuaciones



$a < b$ si y solo sí *a* esta a la izquierda de *b*.

Ejemplo – *Ordenando Números Reales*

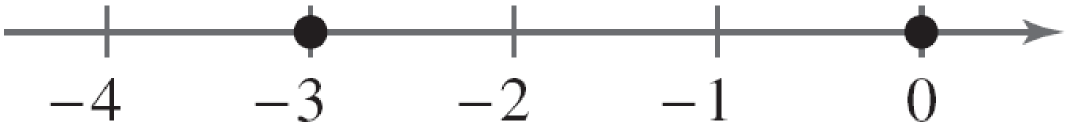
Indique el simbolo apropiado(< o >) según correponda entre cada par de números reales.

a. $-3, 0$ **b.** $-2, -4$ **c.** $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ **d.** $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$

Ejemplo – *Solución*

Solución:

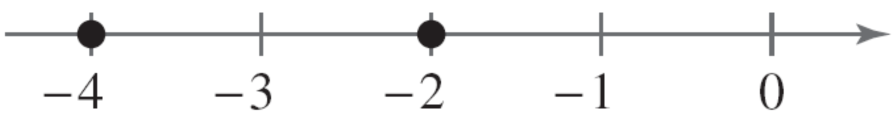
a. –3 está a la izquierda de 0 en la recta real, por tanto –3 es *menor que* 0, y se escribe –3 < 0.



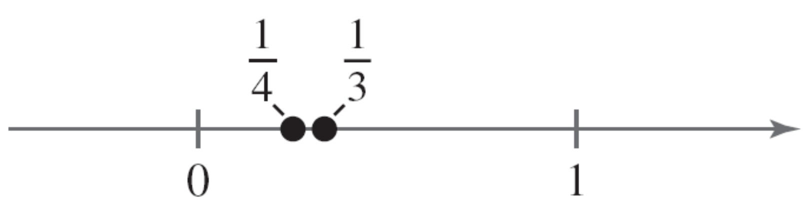
Ejemplo – *Solución*

cont'd

b. –2 está a la derecha de –4 en la recta real, por tanto 2 es *mayor que* –4, y se escribe –2 > –4



c. $\frac{1}{4}$ está a la izquierda de $\frac{1}{3}$ en la recta real, por tanto $\frac{1}{4}$ es menor que $\frac{1}{3}$ y se escribe $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$

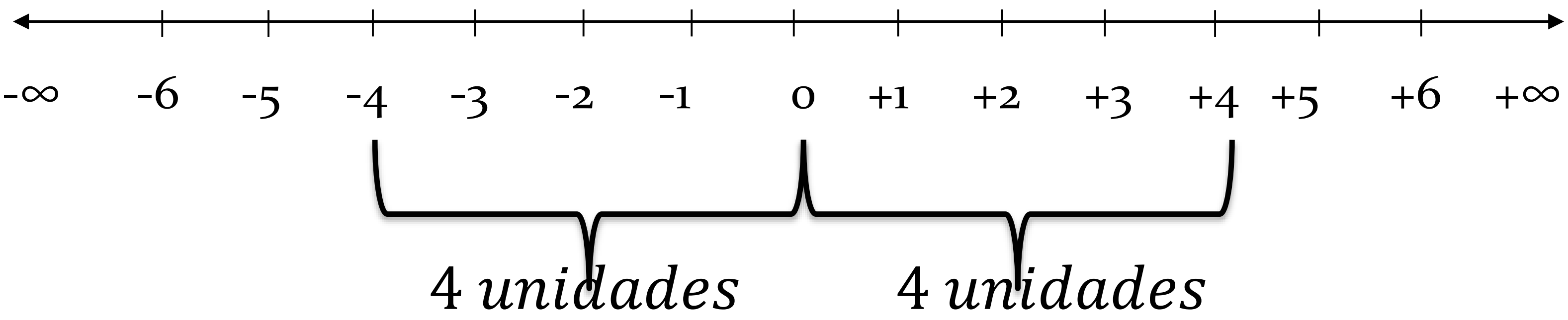


Reales Opuestos- Inversos Aditivos

Dos números reales son ***opuestos*** cuando la distancia de cada uno a 0 es la misma. Tienen signos diferentes. También se les conoce como inversos aditivos, ya que al sumarlos da como resultado 0.

Ejemplo:

$+4$ *y* – 4 *son números opuestos.*



Se puede observar que:

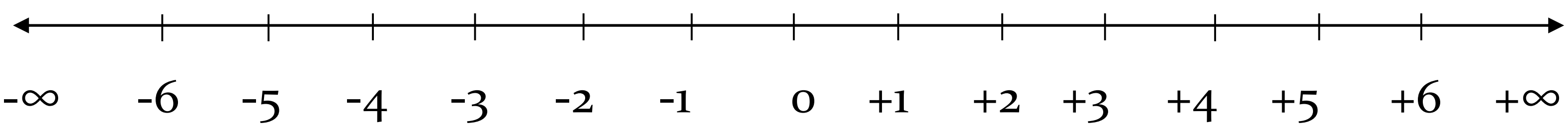
- ✓ Para cada número real, existe un único opuesto.
- ✓ El único número igual a su opuesto es el 0 (cero).
- ✓ Siempre se cumple que un número real y su opuesto están a igual distancia del 0 (cero).

Valor absoluto | |

El valor absoluto de un número real es la *distancia del número entero al cero*. Ejemplo:

|-4|= 4 se lee "*el valor absoluto de -4 es igual a 4*"

|+4|= 4 se lee "*el valor absoluto de +4 es igual a 4*"



Definición de valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

- $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ solamente si $x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

SUMA O ADICIÓN

Cuando sumamos *números reales* de ***igual signo***, **<u>sumamos</u>** los valores absolutos de cada número y al resultado se le coloca el **mismo signo de cada número.**

Pero cuando sumamos *números reales* de ***distinto signo***, **<u>restamos</u>** sus valores absolutos y, al resultado, le damos el **signo** del número de **mayor** valor absoluto.

Ejemplos:

Suma de reales con igual signo:

$$(+4) + (+3) = +7$$
$$(-2) + (-6) = -8$$

Suma de reales con diferente signo:

$$(+5) + (-7) = -2$$
$$(-1) + (+3) = +2$$

Ejercicio: Resuelve

$$-30 + 25 + (-50) + 15$$

RESTA O SUSTRACCIÓN:

Para restar dos ***números reales***, transformamos la resta en suma, de tal forma que al minuendo le sumo el opuesto del sustraendo.

$$a - b = c$$

Diferencia

Minuendo Sustraendo

RESTA O SUSTRACCIÓN:

$$(+4) - (-2) = 4 + 2 = 6$$

$$(-7) - (+3) = -7 + (-3) = -10$$

$$(+8) - (+2) = 8 + (-2) = 6$$

MULTIPLICACIÓN- DIVISIÓN

Para multiplicar (dividir) números reales, multiplica (divide) su valores absolutos, y al resultado coloca el signo de acuerdo a la regla de signos.

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot - = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$

$$+ \div + = +$$
$$- \div - = +$$
$$+ \div - = -$$
$$- \div + = -$$

Ejemplos

$$(+35) \div (+7) = +5$$
$$(-63) \div (-9) = +7$$
$$(+10) \div (-5) = -2$$
$$(-55) \div (+5) = -11$$

$$(+15) \times (+3) = +45$$
$$(-3) \times (-9) = +27$$
$$(+10) \times (-5) = -50$$
$$(-11) \times (+4) = -44$$

Ejercicios

$$(-3) \times (-5)(2)(-4)(5)$$

$$-5(7)(2)(-3)$$

Anotaciones

$0 \div n = \frac{0}{n} = 0$ para todo entero n distinto de 0

$n \div 0 = \frac{n}{0}$ no esta definido para ningún entero.

$0 \div 0$ no está definido.

Ejemplos:

$$5 \div 0$$
$$-18 \div 0$$
$$0 \div (-27)$$

Escribiendo un producto usando exponentes

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ (se lee 3 al cubo)

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ (2^2 se lee 2 al cuadrado)

$$\text{Base} \longleftarrow a^{b} \nearrow \text{exponente}$$

El exponente indica el número de veces que se debe multiplicar por si misma la base.

Todo número entero elevado a la 1 es igual al mismo número. $8^1 = 8$ $(-3)^1 = -3$ $15^1 = 15$

Todo número elevado a la cero es igual a.

$$8^0 = 1 \qquad (-15)^0 = 1$$

Evaluación de expresiones numéricas que tienes más de una operación

Signos de Agrupación

- Parentesis “()”
- Corchetes “[ ]”
- llaves “{ }”

Operaciones

- Exponentes
- Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
- Sumas y restas.

Resolver:

$$12 + (-3)^2[8 - 2(17 - 14)]$$

Ejercicios

1. $35 - |-20|$
2. $-|8 - 5|$
3. $|-7| + |-4| - |-9|$
4. $15 + 9 - 4 - 11$
5. $-6 - 5 - 4 - 3 - 9$
6. $(-3)(4)(-5)$
7. $5 \times 2 \times (-4)$
8. $(-8)(-3)(-1)(-5)$
9. $-2 \cdot |-4| \cdot |-5|$

- $12 - 2[15 - 3(20 - 2^2 \times 3)]$

- $\frac{14-3(2^3-3\times 2)}{8-2[(-3)^2-3-(-2)^2]}$

Ejercicios

Propiedades de la suma y multiplicación de Reales

Sean a, b y c números reales, variables o expresiones algebraicas

Propiedad	Suma	Producto
P. de Cerradura	$a + b$ es un número real	$a \cdot b$ es un número real
P. Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
P. Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
P. De Identidad	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
P. Elemento Inverso	$a + (-a) = -a + a = 0$	Si $a \neq 0,\ \left(\frac{1}{a}\right) a = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$
P. Distributiva	Producto sobre la suma: $a\,(b + c) = (b + c)\,a = ab + ac$	

Reglas básicas del álgebra

Algunos ejemplos que permiten observar por que la propiedad asociativa y conmutativa no se cumple para la sustracción y división

$$5 - (3 - 2) \neq (5 - 3) - 2$$

y

$$16 \div (4 \div 2) \neq (16 \div 4) \div 2$$

Ejemplo – *Identificando reglas del álgebra*

Identifique las propiedades que se aplican en los siguientes ejercicios

a. $\mathbf{2(x+5)=2x+10}$

b. $\mathbf{(5x^3)2=2(5x^3)}$

c. $\mathbf{\left(4x+\frac{1}{3}\right)+\left[-\left(4x+\frac{1}{3}\right)\right]}$

d. $\mathbf{7x\cdot\frac{1}{7x}=1}$

e. $\mathbf{(2+5x^2)+x^2=2+(5x^2+x^2)}$

Properties of negatives

	Propiedades	Ejemplos
1.	$-(-a) = a$	$-(-6) = 6$
2.	$(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-5)3 = -(5 \cdot 3) = 5(-3)$
3.	$(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-x) = 2x$
4.	$(-1)a = -a$	$(-1)7 = -7$
5.	$-(a + b) = (-a) + (-b)$	$-(x + 8) = (-x) + (-8)$ $= -x - 8$

Propiedades del Cero

Properties of Zero

Let a and b be real numbers, variables, or algebraic expressions.

1. $a + 0 = a$ and $a - 0 = a$

2. $a \cdot 0 = 0$

3. $\dfrac{0}{a} = 0, \quad a \neq 0$

4. $\dfrac{a}{0}$ is undefined.

5. Zero-Factor Property: If $ab = 0$, then $a = 0$ or $b = 0$.