NÚMEROS RACIONALES Y REPRESENTACIÓN DECIMAL

Mate 3041
Profa. Milena R. Salcedo Villanueva

FRACCIONES

Una fracción tiene dos términos: numerador y denominador

Denominador indica las veces que se divide una unidad.

Numerador indica las partes que se toman de la unidad dividida

$$\frac{2}{5}$$

Numerador

Barra de fracción

Denominador

Fracciones propias-impropias

Si el numerador es menor que el denominador se le denomina fracción propia.

Si el numerador es mayor que el denominador, se le denomina fracción impropia.

$$\frac{8}{9} \qquad\qquad \frac{12}{5}$$

Fracción propia

Fracción impropia

FRACCIONES MIXTAS

Se llama **fracción mixta** a aquella fracción que está formada por una **parte entera** y una fraccionaria

Ejemplo:

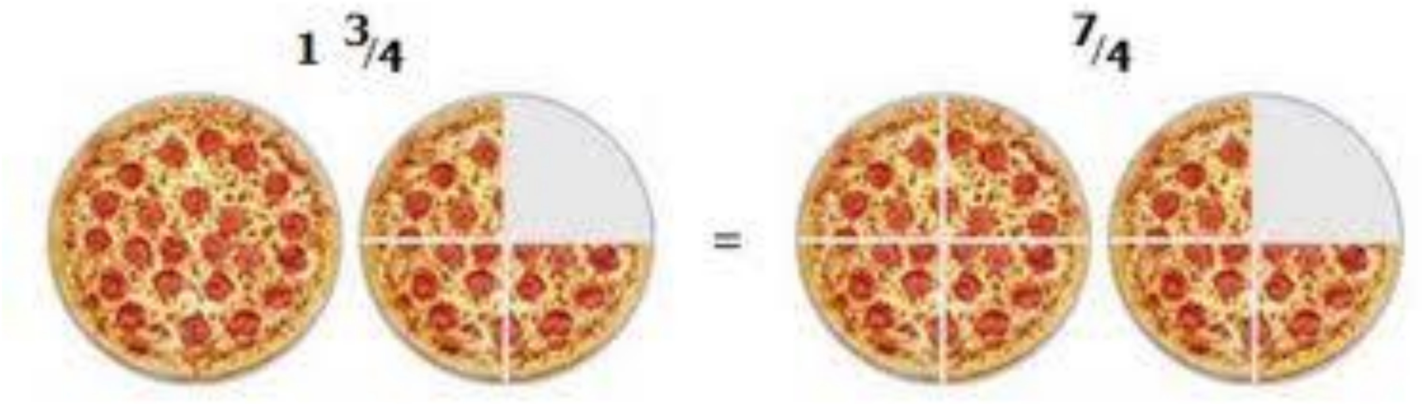
$1\ \frac{3}{4}$ (un entero tres cuartos)

$2\ \frac{1}{3}$ (dos enteros un tercio)

Fracciones mixtas- impropias

NOTA: Las fracciones impropias son equivalentes a las fracciones mixtas.

Ejemplo: $1\ \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$



Cambiar fracciones mixtas a impropias

PASO 1: Se multiplica el número entero por el denominador de la fracción

PASO 2: Suma el numerador de la fracción con el producto obtenido en el paso 1, ese será el numerador de la fracción deseada.

PASO 3: Escribe la fracción usando el numerador obtenido en el paso 2, el denominador se queda igual

Ejemplos de conversion de fracciones mixtas a impropias

- $5\ \frac{2}{7} = \frac{(7\times5)+2}{7} = \frac{37}{7}$
- $3\ \frac{1}{5} = \frac{(5\times3)+1}{5} = \frac{16}{5}$

Cambiar fracciones impropias a mixtas

PASO 1: Divide el numerador por el denominador

PASO 2:

a) Si el residuo de la división es cero, la fracción es un entero, el cociente.

b) Si hay residuo:

$$el\ numero\ mixto = \ cociente + \frac{residuo}{divisor}$$

Ejemplos de conversion de fracciones impropias a mixtas

$$\text{a)}\ \frac{45}{7}$$

$$\frac{45}{7} = 6\ \frac{3}{7}$$

$$b)\frac{12}{5}$$

$$\frac{12}{5} = 2\ \frac{2}{5}$$

FRACCIONES EQUIVALENTES

Son aquellas fracciones que representan un mismo valor.

$$\frac{6}{12} = \frac{2}{4} \quad y \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Note que :

$$6 \times 4 = 12 \times 2 \qquad y \;\; 2 \times 2 = 4 \times 1$$

$$\frac{6}{12}, \frac{2}{4}\; y\; \frac{1}{2} \;\; son\ fracciones\ equivalentes$$

EJERCICIOS

Verifique si $\frac{5}{9}\ y\ \frac{15}{6}$ son fracciones equivalentes.

Encuentre una fracción equivalente a $\frac{20}{16}$

Encuentre una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$

REDUCCION DE UNA FRACCIÓN

Reducir una fracción a sus términos mas simples (simplificar), significa escribir una fracción equivalenteen la cual el numerador y denominador no tienen factores en común distintos de 1.

Ejemplo:

$$\frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

Entonces al reducir a sus términos mas simples la fracción $\frac{3}{9}$ tenemos $\frac{1}{3}$

A la fracción $\frac{1}{3}$ se le llama fracción irreducible

RECÍPROCO DE UN NÚMERO

a. Si el número es una fracción propia o impropia, el recíproco se halla intercambiando el numerador y el denominador.

b. Si el número es un entero distinto de cero, primero se convierte en fracción impropia y luego se intercambian el numerador y el denominador.

c. Si el número es una fracción mixta, se convierte primero a fracción impropia y luego se intercambian el numerador y el denominador

Calculando el recíproco de un número

Número	Recíproco
$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{9}$
$8 = \frac{8}{1}$	$\frac{1}{8}$
$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$	$\frac{5}{13}$

Definición de Números Racionales Q

Recordemos de la clase anterior que:

- los **números racionales** se pueden escribir como el cociente entre dos números enteros.
- Todos los **números enteros** se pueden escribir como el cociente entre dos enteros, es decir todos los enteros son racionales.
- Además todos los **números decimales** infinitos periódicos son tambien **números racionales.**

❖ ¿Es el Cero un número racional?

❖ ¿De qué manera podemos escribir el cero como cociente entre dos números?

Definición Números Racionales Q

Todos los números racionales pueden escribirse entonces de la forma:

$$\frac{a}{b}, donde \;\; a \; y \; b \;\; \in \mathbb{Z} \; y \;\; b \neq 0$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{2}, \frac{-3}{8}, \frac{8}{1}, \frac{-12}{2}$$

Propiedad Fundamental de los racionales

Si a, b y k son enteros, $b \neq 0$ $y\, k \neq 0$, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ (Amplificación)
- $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$ (Simplificación)

Ejemplos: escriba racionales equivalente aplicando la propiedad anterior

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{36}{24}$

Continuación del ejemplo

Solución:

$a.\quad \frac{2}{3} = \frac{2\cdot4}{3\cdot4} = \frac{8}{12}$

entonces $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ se dice que son equivalentes

$b.\quad \frac{36\div12}{24\div12} = \frac{3}{2}$

entonces $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ se dice que son equivalentes

Prueba de los productos cruzados para verificar igualdad de racionales

Para los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, $b \neq 0 \ \ y \, d \neq 0$ se cumple que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \; si \; y \; solo \; si \; a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplos: Verificar si los siguientes racionales son iguales o equivalentes:

$a.$ $\frac{4}{8} \; y \; \frac{1}{2}$

$b.$ $\frac{5}{9} \; y \; 1\frac{4}{5}$

$c.$ $\frac{2}{3} \; y \; 0.67$

Operaciones entre números racionales

Operaciones entre números racionales

Let a, b, c, and d be real numbers, variables, or algebraic expressions such that $b \neq 0$ and $d \neq 0$.

1. **Equivalent Fractions:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ if and only if $ad = bc$.
2. **Rules of Signs:** $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ and $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
3. **Generate Equivalent Fractions:** $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad c \neq 0$
4. **Add or Subtract with Like Denominators:** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$
5. **Add or Subtract with Unlike Denominators:** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
6. **Multiply Fractions:** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
7. **Divide Fractions:** $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad c \neq 0$

Ejercicios

Sumar o Restar según se indique:

- $\frac{2}{5}+\left(\frac{-3}{5}\right)$
- $\frac{7}{2}+\frac{8}{2}$
- $\frac{7}{3}-\frac{15}{3}$
- $\frac{2}{10}+\frac{7}{15}$
- $\frac{-3}{2}+\frac{5}{3}$
- $\frac{7}{20}-\frac{9}{30}$

Ejercicios

Multiplique o divida la fracciones según se indique y luego simplifique:

- $\frac{3}{5} \div \frac{7}{15}$
- $\frac{-4}{7} \div \frac{1}{2}$
- $-4\frac{7}{8} \cdot 3\frac{2}{3}$
- $\frac{2}{10} \div \frac{-7}{15}$
- $\frac{-3}{2} \times \frac{5}{3}$
- $\frac{-7}{20} \div \frac{9}{30}$

Propiedad de densidad de números racionales

Si r y t son números racionales diferentes, con $r < t$, entonces un número racional s tal que:

$$r < s < t$$

Lo cual nos lleva a concluir que: existe una cantidad infinita de números racionales entre dos números racionales diferentes.

Un ejemplo de un número racional que se encuentra entre dos racionales diferentes es la media aritmética o promedio de los dos números racionales.

Media aritmética o promedio

La media aritmética o promedio de varios números es la suma de todos los números dividida entre el total de números.

1. Ejemplo:

a) Encuentre la media aritmética o promedio entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$

b) Encuentre un racional que se encuentre entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$

2. Ejemplo:

a) Encuentre el racional que se encuentre en medio de los racionales $-3 \ y \ \frac{5}{2}$

b) Encuentre el racional que se encuentre en medio de los racionales $\frac{7}{12} y \ \frac{5}{8}$

Forma decimal de los números racionales

Como sabemos los números racionales se pueden expresar como decimales que tienen una parte decimal que se repite. (infinitos periódicos).

$$\frac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0}$$

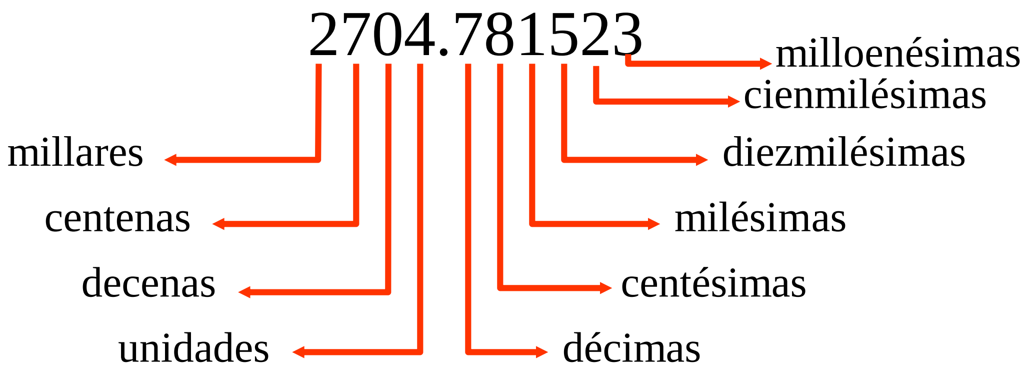
$$\frac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17}$$

$$\frac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\frac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

Forma decimal de números racionales

Los números decimales tienen valores posicionales que son potencias de 10.



El número decimal 2704.781523 se lee dos mil setecientos cuatro, setenta y ochenta un mil quinientos veinti tres milloenésima.

Descomposición de un número decimal

Un número decimal se puede descomponer de varias formas. Veamos algunas:

Número	Descomposición	Lectura
2.375	2 + 0.3 + 0.07 + 0.005	2 unidades, 3 décimas, 7 centésimas y 5 milésimas
2.375	2 + 0.375	2 unidades, y 375 milésimas
2.375	2 + 0.37 + 0.005	2 unidades, 37 centésimas y 5 milésimas

Otro ejemplo:

2704.7815

- 2: millares
- 7: centenas
- 0: decenas
- 4: unidades
- 7: décimas
- 8: centésimas
- 1: milésimas
- 5: diezmilésimas

Es el mismo número:

153.72

153.720

153.7200

0153.720

00153.7200

Conversión de racional $\frac{a}{b}$ a decimal

Para convertir un número racional $\frac{a}{b}$ a decimal, se realiza una division entre a y b o se hace uso de la calculadora.

Ejemplo: convertir a decimal el número racional $\frac{1}{4}$

Solución:

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ 4\,\overline{)\,10} \\ 8 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ejercicios

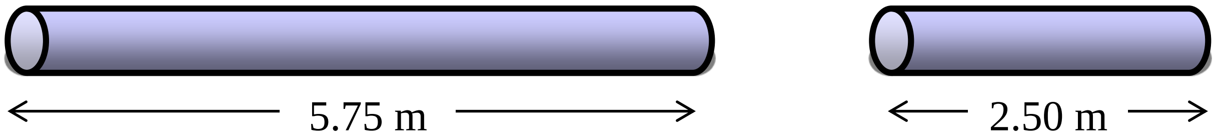
Convertir a decimal las siguientes fracciones:

- $\frac{8}{11}$
- $\frac{15}{4}$
- $\frac{3}{7}$
- $\frac{15}{10}$

- $\frac{7}{1000}$
- $\frac{25}{100}$

Suma de números decimales

Se unen las dos barras de la figura:



La longitud de la barra resultante:

será:

$$\begin{array}{r} 5.75 \\ +\ 2.50 \\ \hline 8.25 \end{array}$$

Observa: $\boxed{5.75 + 2.50} = \frac{575}{100} + \frac{250}{100} = \frac{825}{100} = \boxed{8.25}$

Recuerda: $5.75 = 5 + 0.7 + 0.05 = \frac{500}{100} + \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{575}{100}$

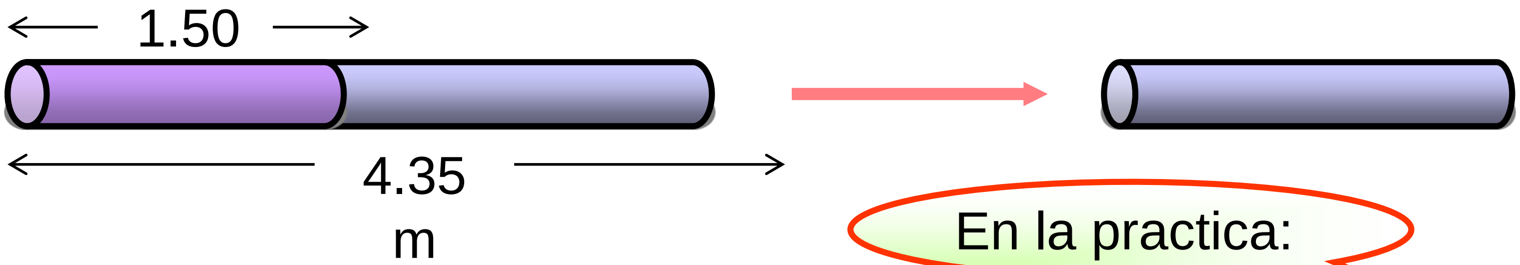
En la practica, los sumandos se colocan en columna y se siguen los pasos:

Para **sumar números decimales**:

Se escribe uno debajo de otro de modo que coincidan las unidades del mismo orden y el punto decimal.
Se suman como si fueran números naturales.
En el resultado se coloca el punto debajo de los puntos de los sumandos.

Resta de números decimales

De una barra que mide 4.35 m se corta un trozo de 1.50 m.



La longitud de la barra resultante será:

$$\boxed{4.35-1.50}=\frac{435}{100}-\frac{150}{100}=\frac{285}{100}=\boxed{2.85}$$

En la practica:

$$\begin{array}{r} 4.35 \\ -\ 1.50 \\ \hline 2.85 \end{array}$$

Para **restar números decimales**:

- Se escribe el menor debajo del mayor de modo que coincidan las unidades del mismo orden y la coma decimal.
- Se restan como si fueran números naturales.
- En el resultado se coloca el punto debajo de los puntos decimales de los sumandos.

Multiplicación de un número decimal por otro natural (I)

Un euro vale 166.386 pesetas. ¿Cuántas pesetas valdrán 8 euros?. Para calcularlo hay que hacer la multiplicación 166.386 por 8:

$$\boxed{166.386\times 8=}\frac{166\,386}{1000}\times 8=\frac{166\,386\times 8}{1000}=\frac{1\,331\,088}{1000}=\boxed{1\,331.088}$$

8 euros valen $1\,331.088$ pesetas.

Para **multiplicar un número decimal por un número natural**:
Se multiplican los dos números como si fueran naturales.
En el resultado se separan con un punto, empezando por la derecha, tantas cifras como tenga el número decimal.

$$\begin{array}{r} 166.386 \\ \times\,8 \\ \hline 1,331.088 \end{array}$$

En la practica:

Multiplicación de un número decimal por otro natural (II)

El espejo tiene forma cuadrada. ¿Cuántos metros de marco se necesitan para enmarcarlo?

Hay que multiplicar $0.85\ m$ por 4:

$$\begin{array}{r} 0.85\ cm \\ \underline{\times\ 4} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 85\ cm \\ \underline{\times\ 4} \\ 340\ cm \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 0.85\ metros \\ \underline{\times\ 4} \\ 3.40\ metros \end{array}$$

Se necesitan $3.40\ m$ de marco.

Para multiplicar un número decimal por un número natural:

- Se multiplican los dos números sin tener en cuenta el punto decimal.
- En el resultado se separan con un punto, empezando por la derecha, tantas cifras decimales como tenga el número decimal.

Multiplicación de un número decimal por la unidad seguida de ceros

Veamos un ejemplo.

Una botella de agua mineral contiene 1.50 litros de agua. ¿Cuántos litros contendrán 10 botellas?

Hay que multiplicar 1.50×10

$$\boxed{1.50 \cdot 10} = \frac{150}{100} \cdot 10 = \frac{150 \cdot 10}{100} = \frac{1500}{100} = \boxed{15.00} \longrightarrow 15 \text{ litros}$$

Observa que el punto se ha desplazado un lugar a la derecha.

Para **multiplicar un número decimal por 10, 100, 1000, …** se desplaza el punto hacia la derecha uno, dos, tres … lugares.

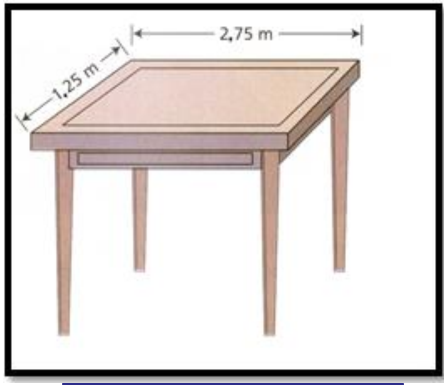
Otros ejemplos:

a) $230.36 \times 1000 \longrightarrow 230360$ (tres lugares)

b) $40.321 \times 100 \longrightarrow 4032.1$ (dos lugares)

Multiplicación de número decimales (I)

Las magnitudes de una mesa son $2.75m$ de largo por $1.25m$ de ancho. Cuántos metros cuadrados de madera se necesitan para fabricar la parte superior de la mesa.



Vienen dados por el producto: $(2.75\,)(1.25)$

$$(2.75\,)(1.25) = \frac{275}{100}\frac{125}{100}\frac{275*125}{100*100} = \frac{34375}{10000} = \boxed{3.4375}$$

Se necesitan 3.4375 metros cuadrados.

En la practica:

2. 7 5
x 1.2
1 3 7 **5**
5 5 0
2 7 5
3.4 3 7 5

Para **multiplicar dos números decimales**:

- Se multiplican como si fueran números naturales.
- Se separan en el resultado con un punto, empezando por la derecha, un número de cifras decimales igual a la suma de las cifras decimales que tiene los dos factores.

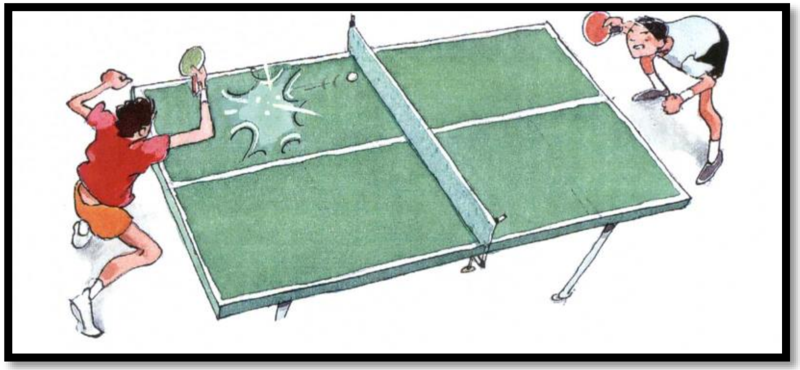
Multiplicación de números decimales (II)

Las medidas reglamentarias de una mesa de ping-pong son: 2.74 m de largo por 1.52 m de ancho. ¿Cuántos metros cuadrados de madera se necesitan para fabricar la mesa?

Hay que multiplicar 2.74 por 1.52

$$\begin{array}{r} 2.74 \\ \times 1.52 \\ \hline 548 \\ 1370 \\ 274 \\ \hline 4.1648 \end{array}$$

Se separan con el punto 4 decimales (2 + 2)



Se necesitan 41648 metros cuadrados.

Para **multiplicar dos números decimales**:

- Se multiplican como si no fueran decimales.
- En el resultado se separa con un punto, empezando por la derecha, un número de cifras decimales igual a la suma de las que tienen los dos factores.

Otro ejemplo: Haz la multiplicación 0.5×0.136

División de un número decimal por otro natural (I)

Un paquete de 3 cintas de vídeo cuesta 8.57 euros. ¿Cuánto cuesta una cinta?

Para averiguarlo hay que dividir 8.57 por 3:

$$\boxed{8.57 \div 3} = \frac{857}{100} \div 3 = \frac{857}{300} = \boxed{2.85}$$

Una cinta cuesta 2.85 euros, 2 euros y 85 céntimos de euro.

En la practica:

$$\begin{array}{r|l} & \underline{2.85} \\ 3 & 8.5\,7 \\ & 2\,5 \\ & \;\;1\,7 \\ & \;\;\;\;2 \end{array}$$

Para **dividir un número decimal por un número natural**:

- Se dividen los dos números como si fueran naturales.
- Al bajar la cifra de las décimas del dividendo, se coloca el punto decimal en el cociente.

Ejercicio: Haz la división $6.754 \div 74$

División de un número decimal por la unidad seguida de ceros

Hagamos la división 902.32 ÷100:

$$902.32 \div 100 = \frac{90\,232}{100} \div 100 = \frac{90\,232}{10000} = 9.0232$$

Observa que el punto se ha desplazado dos lugares a la izquierda.

Para **dividir un número decimal por 10, 100, 1000, …** se desplaza el punto decimal hacia la izquierda uno, dos, tres … lugares.

Otros ejemplos:

a) 230.306 ÷1000 → 0.230306 (tres lugares)

b) 40.321 ÷ 10 → 4.0321 (un lugares)

c) 4.32 ÷ 1000 → 0.00432 (tres lugares)

División de números decimales

Nos planteamos hacer la división 196.56 ÷ 31.5

Esa división es equivalente a 1965.6 ÷ 315

31.5 | 196.56

```
        6. 2 4
3 1 5 | 1 9 6 5. 6 0
      - 1 8 9 0
        0 0 7 5 6
      -     6 3 0
            1 2 6 0
      -     1 2 6 0
            0 0 0 0
```

Hemos multiplicado el dividendo y el divisor por 10.

Así convertimos la división de dos números decimales en la división de un número decimal por otro natural.

Observa que añadiendo un 0 a la derecha de 1965.6 podemos seguir dividiendo y obtener un decimal más en el cociente. (Si el resto no fuese 0 este proceso podría continuarse).

Para **dividir dos números decimales**:
Se multiplican el dividendo y el divisor por 10 o por 100 o por …, de modo que el divisor se transforme en un número natural. A continuación se hace la división.

Ejemplos:

123.78 ÷ 3.789 ⟷ 123 780 ÷ 3 789

0.267 ÷ 1.005 ⟷ 267 ÷ 1 005

(En los dos casos hemos multiplicado por 1000)

Caso de natural entre decimal: 78 ÷ 3.02 ⟷ 7800 ÷ 302

División de números decimales CASO GENERAL

Nos planteamos hacer la división $196.56 \div 31.5$

Esa división es equivalente a $19656 \div 3150$

Para **dividir números decimales**:

- Se multiplican el dividendo y el divisor por una misma potencia de 10 (10 o por 100 o por …), de modo que el dividendo y divisor se transforme en un número entero.
- Y luego se hace la división.

Ejemplos:

$123.78 \div 3.789 \Longleftrightarrow 123\ 780 \div 3\ 789$

$0.267 \div 1.005 \Longleftrightarrow 267 \div 1\ 005$

(En los dos casos hemos multiplicado por 1000)

Caso de natural entre decimal: $78 \div 3.02 \Longleftrightarrow 7800 \div 302$

Ejercicios:

PORCENTAJE O TANTO POR CIENTO

En matemáticas, el **porcentaje** es una forma de expresar un número como una fracción que tiene el número 100 como denominador.

✓También se le llama comúnmente **tanto por ciento**, donde *por ciento* significa «de cada cien unidades».

✓El **porcentaje** o **tanto por ciento (%),** es una de las aplicaciones más usadas de las **proporciones o razones.**

PORCENTAJE O TANTO POR CIENTO

$\mathbf{1}\%$	$\mathbf{15}\%$	$\boldsymbol{x}\%$	$\mathbf{50}\%$
$\frac{1}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{x}{100}$	$\frac{50}{100}$

Porciento a Decimal ✓	Porciento a Fracción	Decimal a Porciento	Fracción a Porciento

	Procedimiento	Ejemplo
Paso 1	Mueve el punto decimal dos lugares hacia la izquierda.	.152%
Paso 2	Remueve el símbolo de%.	.152

Por lo tanto, **15.2%** = **0.152**.

Porciento a Decimal ✓	Porciento a Fracción ✓	Decimal a Porciento	Fracción a Porciento

Procedimiento | **Ejemplo**

Paso 1 Sustituye el símbolo de % con el factor $\frac{1}{100}$.

$$2.4 \times \frac{1}{100}$$

Paso 2 Simplifica la fracción.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{\overset{6}{\cancel{24}}}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} \times \frac{1}{\underset{25}{\cancel{100}}}$$

$$= \frac{3}{125}$$

$$\boxed{\text{Por lo tanto, } \mathbf{2.4\%} = \frac{3}{125}.}$$

Porciento a Decimal ✓ | Porciento a Fracción ✓ | Decimal a Porciento | Fracción a Porciento

15%

Procedimiento | **Ejemplo**

***Paso* 1** Sustituye el símbolo de % con el factor $\frac{1}{100}$.

$$\frac{15}{100}$$

***Paso* 2** Simplifica la fracción.

$$\frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{100}_{\,20}}$$

Por lo tanto, **15%** $= \frac{3}{20}$

Porciento a Decimal ✓ | Porciento a Fracción ✓ | Decimal a Porciento ✓ | Fracción a Porciento

Procedimiento		Ejemplo
Para cambiar de decimal a porciento:		3.45
***Paso* 1**	Mueve el punto decimal dos lugares hacia la derecha.	345.%
***Paso* 2**	Añade el símbolo de % .	**345 %**

Por lo tanto, **3.45** = **345%**.

Porciento a Decimal ✓ | Porciento a Fracción ✓ | Decimal a Porciento ✓ | Fracción a Porciento ✓

Procedimiento	Ejemplo
Para cambiar de fracción a porciento:	$\frac{13}{5}$
***Paso* 1** Cambia la fracción a decimal.	**2.6**
***Paso* 2** Mueve el punto decimal dos lugares hacia la derecha y añade el símbolo de %.	**260 %**

Por lo tanto, $\frac{13}{5} = 260\%$.