# **Polinomios**: **Factorización**.

Preliminares:

En esta sección trabajaremos con los siguientes temas:

**I**. Definiciones.

A) Polinomios primos y polinomios compuestos.

B) Factorizar un polinomio.

**II**. Factorización de polinomios.

A) Extracción del factor mayor común.

B) Productos especiales.

C) Trinomios cuadráticos.

D) Agrupación.

Esta unidad instruccional supone que el lector está familiarizado con los conceptos que nombramos a continuación:

Números primos y números compuestos.

Factorización prima de números naturales.

Factor mayor común (FMC) de dos o más números naturales.

Factor mayor común de (FMC) dos o más términos o monomios.

## **I**. Definiciones.

En las siguientes definiciones consideraremos polinomios cuyos coeficientes son números enteros, que son los polinomios con los que trabajaremos en toda la unidad instruccional.

A) Un polinomio $P$ es *primo* o *irreducible* si sus únicos factores (polinomiales) son $1$ , $-1$ , $P$ y $-P$ . Un polinomio es *compuesto* si no es primo.

B) Por *factorizar un polinomio* entenderemos lo que propiamente llamaríamos *factorizar completamente*,esto es, expresar el polinomio como el producto de factores primos.

## **II**. Factorización de polinomios.

A) Extracción del factor mayor común.

Si consideramos un polinomio que hemos obtenido como el resultado de haber efectuado una multiplicación de un monomio por un polinomio cuyos términos no tienen factores en común (otro que 1), se puede decir que este método consiste en "hechar hacia atrás" dicha multiplicación. Ver el siguiente diagrama:

$$A(B+C+D+\ldots) \quad \rightarrow \text{multiplicamos} \rightarrow \quad AB+AC+AD+\ldots$$
$$AB+AC+AD+\ldots \quad \rightarrow \text{ factorizamos } \rightarrow \quad A(B+C+D+\ldots)$$

Pasamos a los ejemplos (el lector debe estudiar los primeros con mayor detención hasta poder redactar, en sus propias palabras, los pasos a seguir para lograr la factorización.)

Ejemplo 1. Factorizar usando el método de extracción del factor mayor común. Si el polinomio no factoriza por este método, indicarlo.

a) $4x^2 - 8x$

Solución: el FMC de $4x^2$ y $8x$ es $4x$ .

Por el momento tenemos el siguiente esquema:

$4x^2 - 8x = 4x(A - B)$ y lo que falta es determinar $A$ y $B$ apropiados.

Ahora obtenemos $A$ dividiendo el 1^er^ término del polinomio original entre el FMC y de modo similar a $B$ pero usando el 2^do^ término del polinomio original,

$$A = \frac{4x^2}{4x} = x \quad , \qquad B = \frac{8x}{4x} = 2 \ .$$

Por último sustituímos los $A$ y $B$ obtenidos en el esquema,

$4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$ .

Nota: otra forma de obtener $A$ es tomando los factores de $4x^2$ que no se tomaron para el FMC (similar para $B$ .)

b) $24y^5 + 18y^3 - 30y^2$

Solución: el FMC de $24y^5$ , $18y^3$ y $30y^2$ es $6y^2$ .

Esquema: $24y^5 + 18y^3 - 30y^2 = 6y^2(A + B - C)$ ,

$$A = \frac{24y^5}{6y^2} = 4y^3 \quad , \qquad B = \frac{18y^3}{6y^2} = 3y \quad , \qquad C = \frac{30y^2}{6y^2} = 5.$$

Sustituímos: $24y^5 + 18y^3 - 30y^2 = 6y^2(4y^3 + 3y - 5)$ .

c) $42a^4b^5c^7 - 48a^3b^3c^5 - 72a^3b^2c^4$

Solución: El FMC de $42a^4b^5c^7$ , $48a^3b^3c^5$ y $72a^3b^2c^4$ es $6a^3b^2c^4$ .

Esquema: $42a^4b^5c^7 - 48a^3b^3c^5 - 72a^3b^2c^4 = 6c^4b^2a^3(A - B - C)$ ,

$$A = \frac{42a^4b^5c^7}{6a^3b^2c^4} = 7ab^3c^3 \quad , \qquad B = \frac{48a^3b^3c^5}{6a^3b^2c^4} = 8bc \quad , \qquad C = \frac{72a^3b^2c^4}{6a^3b^2c^4} = 12 \ .$$

Sustituímos: $42a^4b^5c^7 - 48a^3b^3c^5 - 72a^3b^2c^4 = 6c^4b^2a^3(7ab^3c^3 - 8bc - 12)$ .

d) $15x^5(x+3)^8 - 5x^4(x+3)^7 + 100x^2(x+3)^6$

Solución: En este caso trabajamos de modo similar a los demás, pero considerando al binomio $(x+3)$ como un factor diferente.

Aquí los términos a considerarse son: $15x^5(x+3)^8$ , $5x^4(x+3)^7$ y $100x^2(x+3)^6$ ; el FMC es $5x^2(x+3)^6$ .

Esquema: $15x^5(x+3)^8 - 5x^4(x+3)^7 + 100x^2(x+3)^6 = 5x^2(x+3)^6(A - B + C)$ ,

$$A = \frac{15x^5(x+3)^8}{5x^2(x+3)^6} = 3x^3(x+3)^2 \quad , \quad B = \frac{5x^4(x+3)^7}{5x^2(x+3)^6} = x^2(x+3) \quad , \quad C = \frac{100x^2(x+3)^6}{5x^2(x+3)^6} = 20.$$

Sustituímos: $15x^5(x+3)^8 - 5x^4(x+3)^7 + 100x^2(x+3)^6$

$$= 5x^2(x+3)^6\left[3x^3(x+3)^2 - x^2(x+3) + 20\right] .$$

Nota: En caso podemos expandir el factor entre corchetes y así expresar el resultado como: $5x^2(x+3)^6[3x^5 + 18x^4 + 26x^3 - 3x^2 + 20]$ .

e) $3x + 5xy + 6y$

Solución: Ver que el FMC de los términos es $1$, por lo tanto el polinomio no factoriza por el método de extracción del factor mayor común.

B) Productos especiales.

Antes de empezar la discución debemos repasar los productos especiales:

| | |
|---|---|
| $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ | diferencia de cuadrados |
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | trinomio cuadrado perfecto |
| $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ | diferencia de cubos |
| $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ | suma de cubos |

Podemos usar estas identidades para pasar del lado izquierdo (los factores) al lado derecho (el producto) o para ir en la otra dirección, o sea, factorizar el lado derecho. Veamos el proceso en ambas direcciones con un caso particular:

| Usando productos especiales en multiplicación. |
|---|
| empezamos con $(2x+3)(2x-3)$<br>identifacamos la expresión como un caso particular de $(a+b)(a-b)$<br>donde $a = 2x$ y $b = 3$<br>sustituímos esos valores de $a$ y $b$ en $a^2 - b^2$ para obtener<br>$\left((2x)^2 - (3)^2\right) = (4x^2 - 9)$<br>igualamos el principio con el final para obtener el resultado deseado:<br>$(2x+3)(2x-3) = (4x^2 - 9)$ |

Ahora veamos el proceso en la otra dirección:

| Usando productos especiales para factorizar. |
|---|
| empezamos con $(4x^2 - 9)$<br>identifacamos la expresión como un caso particular de $a^2 - b^2$<br>donde $a = 2x$ y $b = 3$<br>sustituímos esos valores de $a$ y $b$ en $(a+b)(a-b)$ para obtener<br>$(2x+3)(2x-3)$<br>igualamos el principio con el final para obtener el resultado deseado:<br>$(4x^2 - 9) = (2x+3)(2x-3)$ |

Antes de empezar con los ejemplos debemos tener claro que muchas veces tenemos que aplicar más de un método para lograr la factorización completa de un polinomio, por eso hacemos la siguientes recomendaciones:

*En caso de que el método aplique, siempre debemos extraer el FMC en un primer paso.*
*Despúes de usar un método, revisar los factores obtenidos ya que éstos podrían factorizar.*

Ejemplo 2. Factorizar usando productos especiales.

a) $x^3 + 125y^3$ .
Solución: Primero debemos notar que $125y^3 = 5^3y^3 = (5y)^3$,
así que $x^3 + 125y^3 = x^3 + (5y)^3$ . (Ver que el FMC de los términos es $1$ .)
Identificamos el polinomio $x^3 + (5y)^3$ como un caso particular de
$a^3 + b^3$ donde $a = x$ y $b = 5y$ .

Sustituímos esos valores de $a$ y $b$ en $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ para obtener $(x+5y)(x^2-5xy+25y^2)$ . Así $x^3+125y^3 = (x+5y)(x^2-5xy+25y^2)$ .

b) $16x^3y-4xy$ .

Solución: Primero extraemos el FMC: $4yx(4x^2-1)$ .

Ahora nos encargamos de $4x^2-1 = \left((2x)^2-1^2\right)$ .

Usando diferencia de cuadrados con $a = 2x$ y $b = 1$ tenemos

$4x^2-1 = \left((2x)^2-1^2\right) = (2x-1)(2x+1)$ .

Finalmente $16x^3y-4xy = 4yx(2x-1)(2x+1)$ .

c) $108a^3b^2+72a^2b^5+12ab^8$ .

Solución: Primero extraemos el FMC: $12ab^2(9a^2+6ab^3+b^6)$ .

Ahora nos encargamos de $9a^2+6ab^3+b^6$ .

En este ejercicio el polinomio dado utiliza las mismas variables que nuestros modelos de los producto especiales . Para evitar posibles confuciones podemos reescribir la fórmula a usarse utilizando cualesquiera otras letras, por ejemplo: $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ .

Si escribimos $9a^2+6ab^3+b^6$ como $(3a)^2+2(3a)b^3+(b^3)^2$ tenemos un caso de $A^2+2AB+B^2$ con $A = 3a$ y $B = b^3$ , así que $9a^2+6ab^3+b^6 = (3a+b^3)^2$ .

Finalmente $108a^3b^2+72a^2b^5+12ab^8 = 12ab^2(3a+b^3)^2$ .

d) $u^2-8uv+16v^2$ .

Solución: $u^2-8uv+16v^2 = u^2+2u(-4v)+(-4v)^2$

Usando $a = u$ y $b = -4v$ en $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ tenemos

$u^2-8uv+16v^2 = (u+(-4v))^2 = (u-4v)^2$ .

e) $x^4-16$ .

Solución: Usando diferencia de cuadrados tenemos

$x^4-16 = (x^2)^2-4^2 = (x^2-4)(x^2+4)$ .

otra aplicación de la misma técnica en $(x^2-4)$ nos da

$x^4-16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ .

Nota: Más adelate veremos que $x^2+4$ es primo.

f) $x^6-y^6$ .

Solución: Reescribimos $x^6-y^6 = (x^3)^2-(y^3)^2$ para obtener, usando diferencia de cuadrados, $x^6-y^6 = (x^3-y^3)(x^3+y^3)$ .

Usando diferencia de cubos en el primer factor y suma de cubos el el segundo y poniendolo todo junto obtenemos el resultado final:

$x^6-y^6 = (x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ .

Nota: En el último ejemplo podíamos haber empezado escribiendo $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3$ . Luego usando diferencia de cubos obtenemos $x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ . Entonces con una aplicación de diferencia de caudrados $x^6 - y^6 = (x - y)(x - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ . De esta forma nos enconcramos con el problema de que no teníamos un modelo para factorizar el trinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ . Revisando todo esto podemos escribir otra fórmula para factorizar, que, aunque usualmente no se considera en este nivel, el lector interesado puede añadir a su lista:

$$\boxed{a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)}$$

C) Trinomios cuadráticos.

En esta parte usaremos el *método del número clave* para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ como el producto de dos factores de grado uno (los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ los consideraremos como un caso especial donde se puede tomar un atajo.)

Discución del método.

Primero observemos el proceso en la dirección contraria,o sea, empezamos con un producto expresado de la forma $(px + q)(rx + s)$ y llevamos a cabo la multiplicación paso a paso.

Multiplicando $px$ (y luego $q$ ) por cada término de $(rx + s)$ obtenemos:

$$(px + q)(rx + s) = (prx^2 + psx) + (qrx + qs)$$
$$= prx^2 + (psx + qrx) + qs = prx^2 + (ps + qr)x + qs \ .$$

Si establecemos $prx^2 + (ps + qr)x + qs = ax^2 + bx + c$ debemos tener

$a = pr$, $b = ps + qr$ y $c = qs$ .

Ahora observamos que $ac = prqs = (ps)(qr)$ , esto es, el producto $ac$ tiene dos factores cuya suma es $b$ .

Con esto en mente veamos el método aplicado a un caso particular.

Empecemos con $10x^2 + 29x + 21$ . Tenemos $a = 10$, $b = 29$ y $c = 21$ .

El *NÚMERO CLAVE* es $ac = 10 \times 21 = 210$ .

Buscamos números $u$ y $v$ tales que

$uv = ac$ *(= NÚMERO CLAVE)* y $u + v = b$ .

Los números buscados son $u = 15$ y $v = 14$

($uv = 15 \times 14 = 210 = ac$ y $u + v = 15 + 14 = 29 = b$)

Para factorizar el polinomio, rompemos a $b = 29$ en $10x^2 + 29x + 21$ y procedemos como en la multiplicación arriba pero en la dirección contraria:

$10x^2 + 29x + 21 = 10x^2 + (15 + 14)x + 21 = (10x^2 + 15x) + (14x + 21)$ .

Ahora extraemos el FMC de cada binomio entre paréntesis,

$10x^2 + 29x + 21 = (10x^2 + 15x) + (14x + 21) = 5x(2x + 3) + 7(2x + 3)$ .

Por último extraemos el factor $2x+3$ en los dos términos de $5x(2x+3)+7(2x+3)$ :
$10x^2+29x+21 = 5x(2x+3)+7(2x+3) = (2x+3)(5x+7)$ .

Nota: Una forma de obtener los números $u$ y $v$ es factorizando completamente el número clave. Luego agrupando los factores en dos grupos obtenemos candidatos que después sumamos hasta obtener la pareja cuya suma sea $b$ .

Veamos otra ilustración llevando únicamente los pasos relevantes.
Factorizar $8x^2-14x-15$ .
$a = 8,\ b = -14$ y $c = -15$
*NÚMERO CLAVE* $ac = (8)(-15) = -120$
$-120 = -1\times 2\times 2\times 2\times 3\times 5 = (2\times 3)(-1\times 2\times 2\times 5) = (6)(-20) = uv$
($uv = (6)(-20) = -120 = ac$ y $u+v = 6+(-20) = -14 = b$)
$8x^2-14x-15 = (8x^2+6x)+(-20x-15) = 2x(4x+3)-5(4x+3)$
$= (4x+3)(2x-5)$ .

Ejemplo 3. Factorizar usando el método del número clave.

a) $30x^2+41x+7$.
Solución: $a = 30,\ b = 41$ y $c = 7$
$ac = 30\times 7 = 210 \qquad u = 35 \qquad v = 6$
$30x^2+41x+7 = (30x^2+35x)+(6x+7) = 6x(5x+1)+7(5x+1)$
$= (5x+1)(6x+7)$

b) $2x^2-x-1$ .
Solución: $a = 2,\ b = -1$ y $c = -1$
$ac = 2\times(-1) = -2 \qquad u = -2 \qquad v = 1$
$2x^2-x-1 = (2x^2-2x)+(x-1) = 2x(x-1)+1(x-1)$
$= (x-1)(2x+1)$

c) $300x+90x^2+90$ .
Solución: $300x+90x^2+90 = 30(3x^2+10x+3)$
$a = 3,\ b = 10$ y $c = 3$
$ac = 3\times(3) = 9 \qquad u = 9 \qquad v = 1$
$300x+90x^2+90 = 30(3x^2+10x+3) = 30[(3x^2+9x)+(x+3)]$
$= 30[3x(x+3)+1(x+3)] = 30(x+3)(3x+1)$

d) $12x^2 - 29x + 14$ .

Solución: $a = 12,\ b = -29$ y $c = 14$

$ac = 12 \times 14 = 168 \qquad u = -21 \qquad v = -8$

$$\left.\begin{array}{l} 12x^2 - 29x + 14 = (12x^2 - 21x) + (-8x + 14) \\ = 3x(4x - 7) - 2(4x - 7) = (3x - 2)(4x - 7) \end{array}\right\}$$ (Note como manejamos el signo)

e) $156x^4y^2 - 72x^3y^2 - 72x^5y^2$.

Solución: $156x^4y^2 - 72x^3y^2 - 72x^5y^2 = 12x^3y^2(-6x^2 + 13x - 6)$

$a = -6,\ b = 13$ y $c = -6$

$ac = -6 \times (-6) = 36 \qquad u = 9 \qquad v = 4$

$156x^4y^2 - 72x^3y^2 - 72x^5y^2 = 12x^3y^2[(-6x^2 + 9x) + (4x - 6)]$

$= 12x^3y^2[-3x(2x - 3) + 2(2x - 3)] = 12x^3y^2(2x - 3)(-3x + 2)$

f) $x^6 - 5x^3 - 14$ .

Solución: Este trinomio no es cuadrático pero podemos verlo como uno usando una sustitución (por eso lo llamamos *cuadrático en forma*.)

Ver que $x^6 - 5x^3 - 14 = (x^3)^2 - 5(x^3) - 14$ .

Si escribimos $z = x^3$ y sustituímos, obtenemos:

$$\underbrace{z^2 - 5z - 14 = (z - 7)(z + 2)}$$

(factorizando como arriba o con cualquier otro método que aplique.)
Por último nreintalamos la variable original:
$x^6 - 5x^3 - 14 = (x^3 - 7)(x^3 + 2)$

Consideremos ahora trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ .
Ver que estos trinomios son casos especiales de $ax^2 + bx + c$ donde $a = 1$ .
Como $a = 1$ , el número clave es $ac = (1)c = c$ , así que necesitamos números $u$ y $v$ cuyo producto sea $c$ y cuya suma sea $b$ .
En estos casos, después de tener los números $u$ y $v$ podemos pasar directamente a la factorización: $x^2 + bx + c = (x + u)(x + v)$ .
Pasemos a una ilustración:

Para factorizar $x^2 - 4x - 45$ necesitamos $uv = -45 = c$ con $u + v = -4 = b$ .

Los números deseados son $u = -9$ y $v = 5$ y la factorización es:

$$(x + u)(x + v) = (x - 9)(x + 5)\ .$$

Antes de pasar al próximo método dediquemos un momento a una pregunta que puede surguir naturalmente cuando hablamos de factorización de polinomios: ¿Cómo saber si un polinomio es primo? Ésta pregunta, por más sencilla que parezca, se trata (en general) en cursos muy avanzados o especializados de matemáticas. Nosotros, a este nivel, nos tenemos que conformar con factorizar un polinomio si éste factoriza con uno de los métodos discutidos aquí (o con una que otra técnica que nos traerán los cursos de precálculo y cálculo, si éstos nos son de interés.) Sin embargo, con lo que ya hemos trabajado aquí, podemos (y necesitamos) identificar algunos casos. Veamos las ilustraciones a continuación.

Considerar el trinomio $x^2 + 5x + 2$ .
Como los términos no tienen factores en común (otro que $1$) la única opción que queda es una factorización de la forma $(x+u)(x+v)$ donde $uv = 2$ y $u+v = 5$ .
Después de considerar todas las posibles parejas de enteros $u$ y $v$ cuyo produto es $2$ (hay sólo 2, considerando los signos) vemos que ninguna llena el requisito de que su suma sea $5$ . Así que $x^2 + 5x + 2$ es primo. Trate el lector el binomio $x^2 + 4$ como un caso de $x^2 + bx + c$ donde $b = 0$ y llegue a la siguiente generalización, que le será muy útil recordar:

| Si $a \neq 0$ es un entero, $x^2 + a^2$ es irreducible. |
|---|

D) Factorización por agrupación.

La técnica usada la podemos describir con los siguientes pasos:
Primero: Organizar los términos del polinomio en dos o más grupos.
Segundo: Aplicar alguna método de factorización en al menos uno de los grupos.
Tercero: Volver a considerar el todo con los otros métodos.

Ejemplo 4. Factorizar por agrupación.

a) $3b - ya + 3a - yb$
Solución: cambiamos el orden de los términos y agrupamos
$(3b - yb) + (3a - ya)$
extraemos el FMC de cada grupo
$b(3-y) + a(3-y)$
extraemos el factor común $(3-y)$ de los dos términos
$(3-y)(b+a)$ .

b) $xa^2 + 3by - 2ax + 3bx + ya^2 - 2ay$
Solución: cambiamos el orden de los términos y agrupamos los términos con $x$ en un grupo y los términos con $y$ en otro
$(xa^2 - 2ax + 3bx) + (ya^2 + 3by - 2ay)$
extraemos el FMC de cada grupo
$x(a^2 - 2a + 3b) + y(a^2 + 3b - 2a)$
como $a^2 + 3b - 2a = a^2 - 2a + 3b$ tenemos
$x(a^2 - 2a + 3b) + y(a^2 - 2a + 3b)$
extraemos el factor común $(a^2 - 2a + 3b)$ de los dos términos
$(a^2 - 2a + 3b)(x+y)$ .

c) $xa^2 + 3by - 2ax + 3bx + ya^2 - 2ay$ [el mismo polinomio en (b) pero trabajado con diferente agrupación.]

Solución: agrupamos los términos con $a^2$ ,los términos con $b$ y los términos con $a$

$(xa^2 + ya^2) + (3bx + 3by) + (-2ax - 2ay)$

extraemos el FMC de cada grupo

$a^2(x + y) + 3b(x + y) - 2a(x + y)$

extraemos el factor común $(x + y)$ de los tres términos

$(x + y)(a^2 + 3b - 2a)$ .

d) $ax^2 + 2x^2 + 6ax + 12x + 9a + 18$

Solución: agrupamos los términos con $a$ y los términos sin $a$

$(ax^2 + 6ax + 9a) + (2x^2 + 12x + 18)$

extraemos el FMC de cada grupo

$a(x^2 + 6x + 9) + 2(x^2 + 6x + 9)$

extraemos el factor común $(x^2 + 6x + 9)$ de los dos términos

$(x^2 + 6x + 9)(a + 2)$

factorizamos el trinomio cuadrático

$(x + 3)^2(a + 2)$ .

e) $ax^2 - 2x^2 + 2a^2x - 4ax + a^3 - 2a^2$

Solución: agrupamos los términos con $x^2$ , los términos con $x$ y formamos otro grupo con los restantes

$(ax^2 - 2x^2) + (2a^2x - 4ax) + (a^3 - 2a^2)$

extraemos el FMC de cada grupo

$x^2(a - 2) + 2ax(a - 2) + a^2(a - 2)$

extraemos el factor común $(a - 2)$ de los tres términos

$(a - 2)(x^2 + 2ax + a^2)$

factorizamos el trinomio usando productos especiales

$(a - 2)(x + a)^2$ .

f) $4 + 2ay - a^2 - y^2$

Solución: agrupamos y extraemos el FMC de cada grupo

$(4 + 2ay) + (-a^2 - y^2) = 2(2 + ay) - (a^2 + y^2)$

descartamos este intento ya que no vemos que podamos progresar e intentamos otra agrupación

$(4 - a^2) + (2ay - y^2) = (2 - a)(2 + a) + y(2a - y)$

descartamos este otro intento y empezamos de nuevo

$(4 - y^2) + (2ay - a^2) = (2 - y)(2 + y) + a(2y - a)$

tampoco progresamos. Intentemos la siguiente agrupación

$4 + (-a^2 + 2ay - y^2)$

factorizamos $-1$ del trinomio

$4 - (a^2 - 2ay + y^2)$

factorizamos el trinomio usando productos especiales

$4 - (a - y)^2$

completamos la factorización usando diferencia de cuadrados

$(2 - (a - y))(2 + (a - y)) = (2 - a + y)(2 + a - y)$ .

# Ejercicios I

1) Factorizar por el método del Factor Mayor Común.

a) $12x^3 + 18ax^2 - 6bx$ b) $30x^3y^3 - 10xy^2$ c) $-6z^5 + 4xz^2 - 10z$

d) $168a^5b^3c^4 - 252a^3b^2c^9 - 420a^4bc^5$ e) $12(a + b)^5x^2 + 30(a + b)^2xy$

f) $3x^2(4x^2 + x) - 8x(4x^2 + x) + (4x^2 + x)$ g) $(4xy^2 + 12xy^3)^5$

h) $2a^2b(3a^3 - 6a^2b)^2 - 4ab^2(3a^3 - 6a^2b)^2$

2) Factorizar por productos especiales.

a) $100x^2 - 9$ b) $25x^2 - 10x + 1$ c) $8 - y^3$

d) $9x^2 + 6xy + y^2$ e) $125a^3 + 27b^3$ f) $50a^2 - 8(a + b)^2$

g) $9a^4 - 6a^2b^3 + b^6$ h) $u^6 - v^6$ i) $4(a + b)^2 + 2c(a + b) + c^2$

j) $-27x^3a^6 - 54a^3$ k) $8a^3b + 12a^2b^2 + 18ab^3$

l) $4x^2 + 9$ m) $(z + 1)^3 + 1$

n) $(u + v)^2 - 16(u - v)^2$

3) Factorizar cada trinomio.

a) $6x^2 - 7x - 5$ b) $15x^2 + 4x - 4$

c) $9y^4 + 9y^2 - 10$ d) $63x^2 - 10x - 8$

e) $4x^2 - 66x + 90$ f) $2z^4 + 7z^2 + 5$

g) $40x^4 + 12x^3 - 4x^2$ h) $36x^2 + 90x - 54$

i) $81y^4 + 45y^2 - 36$ j) $3a^2 - ab - 2b^2$

k) $8a^2b^2 - 17ab + 2$ l) $z^4 + 6z^2 + 5$

4) Factorizar por agrupación.

a) $4x + 4e - de - dx$ b) $ax - ab - by + xy$

c) $6uz - 3ux - 4xz + 2x^2$ d) $6a + 6b - 9az - 9bz$

e) $3a + 3x - 2ay + az - 2xy + xz$ f) $8b + 10d + x + 4bx + 5dx + 2$

g) $3a - 9y + ax - 3az - 3xy + 9yz$ h) $24ax - 72bx - 36az + 144cx + 108bz - 216cz$

i) $5bz^3 - 10z^3 - 15b + 30$ j) $2z - x^2 - x^2z + 2$

k) $6x - 4b - bx - 4b^2 - b^2x + 24$ l) $6x^2 - abx - b^2 - bx - ab^2 + 6ax^2$

m) $72d - 27c - 36cd + 24d^2 - 12cd^2 + 54$

n) $12a + 8x - 8ax - 3a^2 + 2a^2x - 12$

ñ) $4a^2x - 4aby - 4abx + 4a^2y + b^2x + b^2y$

o) $4y^2 - 3a^2 - 4ay + 8y^3 - 8ay^2 - 6a^2y$

p) $2x - 3y - 6xy + 4x^2 + 2x^3 - 3x^2y$

q) $16 - x^2 - y^2 - 2xy$

r) $72ab - 24a^2 - 54b^2 + 54$

s) $a^2 - 2xy - 2ab + b^2 - x^2 - y^2$

t) $9y - 6x - 24xy + 8x^2 + 18y^2 + 1$