

Polinomios: Suma, resta y multiplicación.

Preliminares:

En esta sección trabajaremos con los siguientes temas:

I. Polinomios.

- A) Definiciones básicas: grado, coeficiente, término
- B) Suma y resta.
- C) Multiplicación.

Como los polinomios son *expresiones algebraicas*, el lector que así lo necesite puede repasar las nociones básicas sobre éste tema en la sección **Repaso de Álgebra** de esta serie. A continuación nombramos los conceptos sobre expresiones algebraicas que el usuario debe conocer.

Definición

Evaluación

Dominio

I. Polinomios.

Definición: Un polinomio de grado n en una variable, digamos la variable x , es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ y a_0 son números reales fijos con $a_n \neq 0$ y n es un entero no negativo.

En esta definición $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ y a_0 son los *coeficientes (numéricos)* de $P(x)$, $a_n x^n$ es el *término líder* y a_0 es el *término constante*.

Nota: Un número es un polinomio constante. Los polinomios constantes tienen grado cero exepo el polinomio cero al cual no se le define grado.

Ejemplo 1.

En $P(x) = 5x^3 + 7x^2 + \frac{4}{3}x + 8$

el grado n es 3, $a_3 = 5$, $a_2 = 7$, $a_1 = \frac{4}{3}$ y $a_0 = 8$. Además el término líder es $5x^3$ y el término constante es 8.

En $N(x) = 2x^5 - 10x^4 + 9x$

el grado n es 5, $a_5 = 2$, $a_4 = -10$, $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = 9$ y $a_0 = 0$. Además

el término líder es $2x^5$ y el término constante es 0 .

Suma y resta de polinomios.

A los sumandos de un polinomio también se les llama términos (o monomios). Dos o más términos en la misma variable con el mismo grado son *semejantes*

La suma de dos o más términos semejantes se puede simplificar usando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Cuando hemos efectuado esta operación decimos que hemos combinado los términos semejantes. A continuación enunciamos la regla general usada.

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n$$

Ejemplo 2. Simplificar.

a) $3x^4 + 5x^4$

solución: $3x^4 + 5x^4 = (3 + 5)x^4 = 8x^4$

b) $-4x^3 + 7x^3 + 2x^3$

solución: $-4x^3 + 7x^3 + 2x^3 = (-4 + 7 + 2)x^3 = 5x^3$

c) $x^6 - \frac{3}{4}x^6 + 2x^6 + 3x^6 - \frac{5}{6}x^6$

solución:

$$x^6 - \frac{3}{4}x^6 + 2x^6 + 3x^6 - \frac{5}{6}x^6 = (1 - \frac{3}{4} + 2 + 3 - \frac{5}{6})x^6 = (\frac{12-9+24+36-10}{12})x^6 = \frac{53}{12}x^6$$

Para *sumar y/o restar múltiplos de polinomios* usamos la propiedad distributiva y combinamos los términos semejantes.

Ejemplo 3. Simplificar.

a) $4(3x^2 - 5x + 1) + 2(x^4 - 4x^2 - 6x + 3)$

$$= 12x^2 - 20x + 4 + 2x^4 - 8x^2 - 12x + 6 = 2x^4 + (12 - 8)x^2 - (20 + 12)x + (4 + 6)$$

$$= 2x^4 + 4x^2 - 32x + 10$$

b) $5(-x^2 + 2x + 3) - (4x^2 - 6x + 22)$

$$= -5x^2 + 10x + 15 - 4x^2 + 6x - 22 = -9x^2 + 16x - 7$$

c) $3(5x^3 + 4x^2 - 8x + 9) - 2(-3x^4 - 13x^3 - 8x^2 + 6x + 3) + (3x^2 + 5x + 1)$

$$= 15x^3 + 12x^2 - 24x + 27 + 6x^4 + 26x^3 + 16x^2 - 12x - 6 + 3x^2 + 5x + 1$$

$$= 6x^4 + (15 + 26)x^3 + (12 + 16 + 3)x^2 + (-24 - 12 + 5)x + (27 - 6 + 1)$$

$$= 6x^4 + 41x^3 + 31x^2 - 31x + 22$$

Multiplicación de polinomios.

Para obtener *el producto de dos monomios o términos* en la misma variable multiplicamos los coeficientes numéricos y sumamos los exponentes de la variable. Ver la siguiente regla.

$$(ax^n)(bx^m) = (ab)x^{n+m}$$

Ejemplo 4. Simplificar.

- a) $(7x^2)(3x^4)$
 $= (7 \times 3)x^{2+4} = 21x^6$
- b) $(-5x^4)(2x^8)$
 $= (-5 \times 2)x^{4+8} = -10x^{12}$
- c) $(2.3x^7)(3.02x)$
 $= (2.3 \times 3.02)x^{7+1} = 6.946x^8$

El *producto de un monomio por un polinomio* se obtiene usando la ley distributiva y aplicando la regla para el producto de dos monomios. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5. Simplificar.

- a) $4x^3(3x^2 - 5x + 1)$
 $= 4x^3(3x^2) - 4x^3(5x) + 4x^3(1) = 12x^5 - 20x^4 + 4x^3$
- b) $-3x^2(x^4 - 4x^2 - 6x + 3)$
 $= -3x^2(x^4) - 3x^2(-4x^2) - 3x^2(-6x) - 3x^2(3)$
 $= -3x^6 + 12x^4 + 18x^3 - 9x^2$
- c) $5x(-3x^4 - 13x^3 - 8x^2 + 6x + 3)$
 $= 5x(-3x^4) - 5x(13x^3) - 5x(8x^2) + 5x(6x) + 5x(3)$
 $= -15x^5 - 65x^4 - 40x^3 + 30x^2 + 15x$

El *producto de dos polinomios* se obtiene multiplicando cada término del primero por cada término del segundo y luego combinando los términos semejantes. Pasemos a los ejemplos.

Ejemplo 6. Multiplicar y simplificar.

- a) $(3x^2 - 7x + 2)(2x^4 + 5)$
 $= 3x^2(2x^4) + 3x^2(5) - 7x(2x^4) - 7x(5) + 2(2x^4) + 2(5)$
 $= 6x^6 + 15x^2 - 14x^5 - 35x + 4x^4 + 10$
 $= 6x^6 - 14x^5 + 4x^4 + 15x^2 - 35x + 10$
- b) $(3x^2 - 5x + 2)(7x^2 - 6x + 3)$
 $= 3x^2(7x^2) + 3x^2(-6x) + 3x^2(3) - 5x(7x^2) - 5x(-6x) - 5x(3) + 2(7x^2) + 2(-6x) + 2(3)$
 $= 21x^4 - 18x^3 + 9x^2 - 35x^3 + 30x^2 - 15x + 14x^2 - 12x + 6$
 $= 21x^4 - 53x^3 + 53x^2 - 27x + 6$
- c) $..(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1)$
 $= [(x + 2)(x - 3)](x^2 + 1) = [x^2 - x - 6](x^2 + 1)$
 $= x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$

Ejemplo 7. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

- a) $3x^2(x^2 + x - 2) + (x - 3)(x^3 + 1)$
 $= 3x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x^4 + x - 3x^3 - 3$
 $= 4x^4 - 6x^2 + x - 3$
- b) $(x - 2)^3 - (2x + 1)^2$
 $= (x - 2)(x - 2)(x - 2) - (2x + 1)(2x + 1)$
 $= (x^2 - 4x + 4)(x - 2) - (4x^2 + 4x + 1)$
 $= (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 4x^2 - 4x - 1$
 $= x^3 - 10x^2 + 8x - 9$

Ejercicios I

1a) Sea $P(x) = 7x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 1$.

Determine el grado, el término líder, el término constante y los coeficientes a_6 , a_5 , a_3 , y a_1 .

1b) Sea $Q(x) = -x^3 + 9x^4 - \frac{x^2}{2} - (-3)^3$.

Determine el grado, el término líder, el término constante y los coeficientes a_4 , a_3 , a_2 , y a_1 .

1c) Sea $M(x) = x^2 + x - \frac{5x^7}{3} - \frac{x}{2}$.

Determine el grado, el término líder, el término constante y los coeficientes a_7 , a_6 , a_5 , a_4 , a_3 , a_2 , a_1 , y a_0 .

