Repaso de Álgebra

Preliminares:

En esta sección trabajaremos con los siguientes temas:

I. Los *números reales*: racionales e irracionales.
II. Valor absoluto: nociones básicas.
III. Expresiones algebraicas: evaluación, dominio.

El lector debe recordar los conceptos básicos de conjuntos. Algunos de estos son:

Elemento o miembro (pertenece a) → $x \in A$, $x \notin A$
Conjunto nulo o vacío → ϕ
Subconjunto → $A \subseteq B$
Unión e intersección → $A \cup B$, $A \cap B$
Conjunto universal o universo → $\mathcal{U}$
Complemento, complemento relativo → $\widetilde{A}$, $A - B$

I. Los números reales.

Nuestro conjunto universal será el conjunto de todos los números reales. Así, cuando digamos número entenderemos número real, a menos que especifiquemos lo contrario o que del contexto se pueda inferir claramente de que tipo de número hablamos.

Los subconjuntos de los reales de relevancia para nuestra discusión serán denotados según indicamos a continuación:

El conjunto de los números naturales o enteros positivos → $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
El conjunto de los números enteros → $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
El conjunto de los números racionales → $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0 \right\}$
El conjunto de los números irracionales → $\mathbb{I} = \left\{ x \;\middle|\; x \notin \mathbb{Q} \right\}$
El conjunto de los números reales → $\mathbb{R} = \left\{ x \;\middle|\; x \text{ es un número real} \right\}$

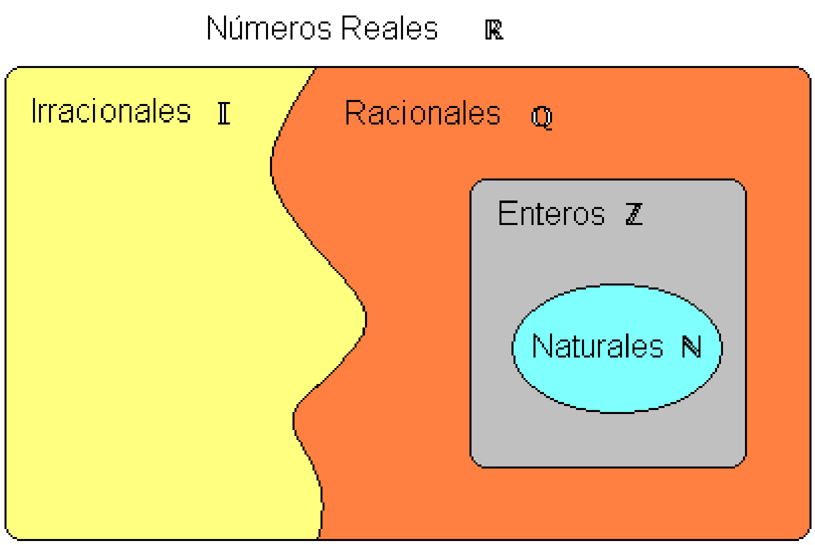
Para estos conjuntos tenemos las siguientes relaciones:

1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. En palabras podemos decir: Todo número natural es entero (y a su vez racional y real), todo número entero es racional*, etc.

$*$ ver que si tomamos un entero cualquiera, por ejemplo -3, tenemos: $-3 = \frac{-3}{1}$ por lo tanto $-3 \in \mathbb{Q}$ ya que hemos podido escribir nuestro número como un **cociente** de dos enteros con el **denominador** diferente de cero. Esto lo podemos hacer con cualquier entero, de aquí que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

2) $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Estas relaciones se ilustran con el siguiente diagrama, donde "ser subconjunto de" pasa a ser, informalmente, "estar dentro de".



Una forma de visualizar a los números reales es mediante sus **expansiones decimales** infinitas. Cada número "es" una expresión de la forma: $\#.d_1d_2d_3d_4\ldots$ donde $\#$ representa un entero y $d_1d_2d_3d_4\ldots$ es una **sucesión** infinita de dígitos.

Notas: 1) Recuerde que $-2.35 = -2.350000\ldots$ y $18.461\overline{34} = 18.461343434\ldots$

$$\underbrace{-2.35}_{\substack{\downarrow \\ \downarrow \\ \text{decimal finito.}}} = \underbrace{-2.350000\ldots}_{\substack{\downarrow \\ \text{decimal infinito } \textbf{periódico}}} \quad \text{y} \quad 18.461\overline{34} = \underbrace{18.461343434\ldots}_{\substack{\downarrow \\ \text{decimal infinito periódico}}}$$

2) Algunos números reales tienen más de una expansión decimal infinita.

Ahora veremos que los números que tienen expansión decimal infinita periódica forman el conjunto de los números racionales. Esto es:

x *es racional* $\underbrace{\textit{si y sólo si}}_{\Leftrightarrow}$ x *tiene expansión decimal infinita periódica.*

La implicación $\Rightarrow$ es fácil de verificar: si x es racional, entonces $x = \frac{a}{b}$ y siempre podemos obtener un decimal finito o infinito periódico equivalente a x efectuando la división $a \div b$.

La otra implicación $\Leftarrow$ es un poco más difícil de verificar para el caso general, por lo que aquí solamente mostraremos una forma de conseguir la fracción $\frac{a}{b}$ equivalente a un decimal infinito periódico dado para ejemplos particulares (el lector se debe convencer de que siguiendo el método de estos ejemplos siempre se puede lograr lo comedido.)

Ejemplo 1: (Cuando el decimal es finito.)

Para estos casos, el **numerador** de la fracción buscada se obtiene removiendo el punto decimal del número dado (obviando los ceros que queden a la izquierda) y el denominador será un uno seguido de tantos ceros como lugares decimales tenga el número. No olvide simplificar el resultado.

a) Encontrar una fracción equivalente a -2.35.

Solución: $\frac{-235}{100} = \frac{-47}{20}$.

b) Encontrar una fracción equivalente a 137.8.

Solución: $\frac{1378}{10} = \frac{689}{5}$.

c) Encontrar una fracción equivalente a 0.0018.

Solución: $\frac{18}{10{,}000} = \frac{9}{5{,}000}$.

Ejemplo 2: (Cuando el decimal no es finito.)

En este caso tenemos que seguir los siguientes pasos:

1) escribir $x = D$, donde D representa al decimal dado escrito de modo que muestre al menos dos bloques repetitivos completos.

2) multiplicar ambos lados de la igualdad $x = D$ por la potencia adecuada de 10 de tal modo que el punto decimal de D pase a la derecha del primer bloque repetitivo.

3) multiplicar ambos lados de la igualdad $x = D$ por la potencia adecuada de 10 de tal modo que el punto decimal de D pase a la izquierda del primer bloque repetitivo.

4) igualar la **diferencia** entre los lados izquierdos de las ecuaciones obtenidas en los pasos

1 y 2 a la diferencia entre los lados derechos. Note que al restar los lados derechos la parte decimal infinita cancela.
5) la ecuación obtenida en el paso anterior tiene forma $ax = b$ donde a y b son enteros.
la fracción busca es $\frac{a}{b}$.

a) Encontrar una fracción equivalente a $4.0\overline{31}$
Solución:

$$x = 4.0313131\ldots$$
$$1{,}000x = (4.0313131\ldots)1{,}000$$
$$1{,}000x = 4{,}031.3131\ldots$$
$$100x = 40.313131\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} 1{,}000x &= 6{,}031.3131.. \\ 100x &= 40.313131.... \end{aligned}\right\} \text{restar lados correspondientes}$$

$$990x = 4{,}011$$

$$x = \frac{4{,}011}{990} = \frac{1{,}337}{330}\ .$$

b) Encontrar una fracción equivalente a $-15.\overline{2}$
Solución:

$$x = -15.222\ldots$$
$$10x = (-15.222\ldots)10$$
$$10x = -152.222\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} 10x &= -152.222\ldots \\ x &= -15.222\ldots \end{aligned}\right\} \text{restar lados correspondientes}$$

$$9x = -137$$

$$x = \frac{-137}{9}\ .$$

c) Encontrar una fracción equivalente a $0.000\overline{30}$

<u>Solución:</u>

$$x = .000303030\ldots$$
$$100,000x = 30.303030\ldots$$
$$1,000x = .3030\ldots$$
$$99,000x = 30$$

$$x = \frac{30}{99,000} = \frac{1}{3,300}\ .$$

Algunos ejemplos de números irracionales que apareceran frecuentemente en el estudio de las matemáticas básicas, precálculo, cálculo, etcétera son:

1) Si P es un número primo, entonces $\sqrt[n]{P}$ (donde $n \geq 2$ es un entero) es irracional. Veamos un bosquejo de la verificación de esta proposición:

> Supongamos que, por el contrario, $\sqrt[n]{P}$ es racional. Así podemos escribir $\sqrt[n]{P} = \frac{a}{b}$ donde a y b son enteros sin factores en común con $b \neq 0$.
> $\sqrt[n]{P} = \frac{a}{b} \Rightarrow \quad P = \left(\frac{a}{b}\right)^n \Rightarrow \quad b^n P = a^n$.
> De la última ecuación arriba se puede derivar una contradicción al hecho de que todo número natural tiene una factorización única (Teorema Fundamental de la Aritmética.) Esta contradicción muestra que $\sqrt[n]{P}$ no es racional. ¿Puede el lector llenar los detalles?

2) La razón $\frac{C}{2r}$ donde C es la circunferencia de cualquier círculo y r es su radio es irracional (este dato no es fácil de verificar, pero su verificación no es de relevancia en este nivel.) Dicha razón se denota con la letra griega π "pi". π es aproximadamente 3.1416. También se puede usar la aproximación $\pi \approx \frac{22}{7}$.

3) La suma (diferencia, producto y cociente) de un racional y un irracional es irracional. *Cuidado*: La suma (diferencia, producto y cociente) de dos racionales es racional, pero la suma (diferencia, producto y cociente) de dos irracionales no necesariamente es irracional. ($\pi - \pi = 0$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$, $\sqrt{5}\,\sqrt{5} = 5$.)

Ejemplo 3:

Determinar si el número dado es racional o irracional. Justifique su respuesta.

a) 7.121212 b) 3π c) $\frac{\pi-3}{3-\pi}$

d) $52.121212\ldots$ e) $\frac{3-\sqrt[5]{7}}{2}$ f) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

g) $25+\sqrt{25}$ h) $4.\overline{7}\div 2$ i) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

j) $5+\sqrt{5}$ k) $\sqrt{2}\sqrt{8}$ l) $\frac{2}{0}$

Solución:

a) decimal finito. racional.

b) producto de un racional por un irracional. irracional.

c) $\frac{\pi-3}{3-\pi} = \frac{-(3-\pi)}{3-\pi} = \frac{-1}{1} = -1.$ racional.

d) decimal infinito periódico. racional.

e) $3-\sqrt[5]{7}$ es irracional al ser la diferencia de un racional menos un irracional por lo tanto $\frac{3-\sqrt[5]{7}}{2}$ es el cociente de un irracional entre un racional. irracional.

f) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ producto de un racional por un irracional. irracional.

g) $25+\sqrt{25} = 25+5 = 30.$ racional.

h) racional (decimal infinito periódico) entre raccional racional.

i) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$ racional.

j) suma de un racional más un irracional. irracional.

k) $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{2\times 8} = \sqrt{16} = 4.$ racional.

l) esta expresión no representa a un número, así que no es racional ni irracional.

II. Valor absoluto.

Definición: Si x es un número real, su valor absoluto o magnitud se representa por $|x|$ y se define por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ilustraciones: $|5| = 5,\quad |-1.3| = 1.3,\quad |0| = 0,\quad \left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$.

Estas ilustraciones muestran una mecánica fácil de seguir para determinar el valor absoluto de un número fijo pero debemos tener un mejor entendimiento de la definición para poder trabajar con casos donde nos encontremos con variables. Veamos como trabajamos con la definición:

Si deseamos evaluar, por ejemplo $|-7|$, debemos ver que aquí -7 juega el papel de x y notar que para este caso $x = -7 < 0$. En este caso la definición nos dice que debemos dar como resltado el opuesto aditivo de x , esto es $-x$. Así,
$|-7| = -(-7) = 7$.

Ejemplo 4:

a) Escribir una expresión equivalente a $|9 - x|$ sin el uso del valor absoluto dado que $x > 9$.
Solución: Para poder salir del valor absoluto debemos saber si $9 - x \geq 0$ ó si $9 - x < 0$.
Como sabemos que $x > 9$, tenemos $9 - x < 0$, así que $|9 - x| = -(9 - x) = x - 9$.

b) Escribir una expresión equivalente a $|x^2 + 1|$.
Solución: Recordar que si x es un número real, entonces $x^2 \geq 0$ (esto se verifica tomando todas las posibilidades de signo para x y las reglas para el signo del producto $x^2 = x \cdot x$.)
Así que $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, por lo tanto $|x^2 + 1| = x^2 + 1$.

Datos adicionales sobre el valor absoluto.

1) El valor absoluto de un número se puede interpretar como la distancia, en la recta real, entre el número y cero.
2) Para todo x , $|x| \geq 0$ y $|x| \geq x$.
3) En general, $|-x| \neq x$.
4) Para todo x , $|-x| = |x|$.
5) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
6) Para todos números reales a y b, $|ab| = |a||b|$ y $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

III. Expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica es una combinación "bien formada" de números y/o variables con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, exponenciación y extracción de raíces.

Ilustraciones:

$3 + 2x$, $5 \div x^2$, -2 , $\sqrt[3]{x + \frac{2y}{5-\pi}}$, $\frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ son expresiones algebraicas.

$\frac{5}{0}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{\div 4}$ no son expresiones algebraicas.

Evaluar una expresión algebraica para un valor preasignado a cada variable es sustituir, en la expresión dada, cada variable por el valor correspondiente.

Ejemplo 5:

Evaluar cada expresión para los valores dados a sus variables. No olvide simplificar.

a) $\frac{9}{5}c + 32$ para $c = 90.$

$$\underbrace{c = 90}$$

$$\underbrace{\tfrac{9}{5}c + 32}$$

$$\tfrac{9}{5}(90) + 32 = \tfrac{810}{5} + 32 = 162 + 32 = 194$$

b) $2x^2 - x + 1$ para $x = -2.$

$$\underbrace{x = -2}$$

$$\underbrace{2x^2 - x + 1}$$

$$2(-2)^2 - (-2) + 1 = 2(4) + 2 + 1 = 8 + 3 = 11$$

c) $\sqrt{2s(s+1)(s+3)}$ para $s = 3.$

$$\sqrt{2(3)(3+1)(3+3)} = \sqrt{6(4)(9)} = 2(3)\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

d) $\frac{1}{2}\pi r^2\theta$ para $r = 6$ y $\theta = \frac{\pi}{2}.$

$$\tfrac{1}{2}\pi(6)^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi 36\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{36}{4}\pi^2 = 9\pi^2$$

e) $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para $b_1 = 2$ y $b_2 = 8.$

$$\tfrac{1}{2}h(2+8) = \tfrac{1}{2}h(10) = 5h$$

f) $\frac{\left[3(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)+1\right]-\left[3x^2-x+1\right]}{\Delta x}$ para $x = 1$ y $\Delta x = .2.$

$$\frac{\left[3(1+.2)^2-(1+.2)+1\right]-\left[3(1)^2-1+1\right]}{.2} = \frac{\left[3(1.2)^2-1.2+1\right]-3}{.2}$$

$$= \frac{3(1.44)-.2-3}{.2} = \frac{4.32-.2-3}{.2} = \frac{1.12}{.2} = 5.6 \quad \text{ó} \quad \frac{28}{5}$$

g) $\frac{ab-\left(z^2+1\right)}{a-b}$ para $a = z+1$ y $b = z-1.$

$$\frac{(z+1)(z-1)-z^2+1}{(z+1)-(z-1)} = \frac{z^2-z+z-1-z^2-1}{z+1-z+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

El **dominio** de una expresión algebraica en una variable.

Sabemos que algunas combinaciones de números con operaciones algebraicas no estan definidas. Por ejemplo $\frac{3}{0}$ y $\sqrt[4]{-16}$ no estan definidas en el sistema de números reales. Por lo tanto, cuando tratamos de evaluar una expresión algebraica para determinado valor de su variable nos podemos encontrar con una situación similar. *El dominio de una expresión algebraica consiste de todos los números que al ser sustituídos por la variable dan lugar a una expresión definida en el sistema de los números reales a menos que se especifique lo contrario.*

Para encontrar el dominio de una expresión algebraica dada debemos estar atentos a los casos donde aparece la variable en algún denominador y/o en algún radicando de una raíz de índice par. Veamos los siguientes ejemplos que nos ilustrarán como trabajar con los casos que nos interesan.

Ejemplo 6:

Determinar el dominio de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3x^5 + x^2 - 1$

Solución: Esta expresión es un polinomio.Sabemos que los polinomios estan definidos para todos los valores de su variable, así que el dominio es el conjunto de todos los números reales.

Dominio $= \mathbb{R}$

b) $\frac{1}{x}$

Solución: Esta expresión es un cociente. Como el numerador siempre esta definido (es un número fijo), lo único que puede dar lugar a una expresión no definida es la sustitución de x por 0. Así vemos que el dominio consiste de todos los números reales salvo el cero.

Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$.

c) $\frac{x+4}{2x-3}$

Solución: Este caso es similar al anterior en el sentido de que la expresión también es un cociente donde el numerador siempre esta definido (a cualquier número real x le podemos sumar 4). Ahora debemos determinar que número o números hacen que el denominador $2x-3$ sea cero. Para esto resolvemos la ecuación $2x-3=0$.

$$2x-3=0$$
$$2x=3$$
$$x=\tfrac{3}{2}.$$

El dominio consiste de todos los números reales salvo $\frac{3}{2}$.

Dominio $= \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

d) $\frac{\frac{1}{x+1}-2}{x^2-4}$

Solución: La expresión en este caso envuelve dos denominadores. Procedemos a resolver las ecuaciones $x+1=0$ y $x^2-4=0$

$$x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$$
$$x^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=\pm 2$$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-1,-2,2\}$.

e) $\sqrt[3]{x-2}$

Solución: La expresión en este caso es una raíz cúbica. Como las raices de índice impar estan definidas para todos los números reales y el radicando $x-2$ es un polinomio el dominio contiene a todos los reales.

Dominio $= \mathbb{R}$

f) $\sqrt{x}$

Solución: El dominio de la expresión $\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos ya que estos son todos los números que tienen raíz cuadrada principal definida en el sistema.

Dominio $= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\right\} = [0, \infty)$.

g) $\sqrt[4]{12x+4}$

Solución: Este caso es similar al anterior en el sentido de que la expresión también es una raíz de índice par. Como el radicando es un polinomio, el único "problema" sería que la expresión $12x+4$ de lugar a un valor no negativo. El dominio es el conjunto solución de la desigualdad $12x+4 \geq 0$.

$$12x + 4 \geq 0$$
$$12x \geq -4$$
$$x \geq \tfrac{-4}{12}$$
$$x \geq \tfrac{-1}{3}$$

Dominio $= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \tfrac{-1}{3}\right\} = \left[\tfrac{-1}{3}, \infty\right)$.

h) $\frac{7}{x^2+10}$

Solución: Este caso es similar a la parte (c) arriba. La diferencia es que el denominador x^2+10 no es cero para $x \in \mathbb{R}$ (la ecuación $x^2+10=0$ no tiene solución real.)

Dominio $= \mathbb{R}$.

i) $\sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3}$

Solución: En esta expresion tenemos dos cosas que considerar: Primero el radicando $x-2$ debe ser no negativo y segundo el denominador $x-3$ debe ser diferente de cero.

$$1^{\underline{ro}} \;:\; x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$$
$$2^{\underline{do}} \;:\; x-3 = 0 \iff x = 3$$

Vemos que el dominio tiene a los números mayores o iguales que 2 salvo 3.

Dominio $= [2,\infty) - \{3\} = [2,3) \cup (3,\infty)$.

Ejercicios I

1) Dar el decimal equivalente a la fracción dada.

a) $\frac{22}{5}$ b) $\frac{180}{3}$ c) $\frac{212}{31}$ d) $-\frac{435}{15}$ e) $-\frac{13}{501}$ f) $\frac{22}{7}$

2) Dar una fracción equivalente al decimal dado. Simplifique el resultado.

a) 23.4 b) 12.03 c) -0.002 d) -7.040404

e) $-0.121212\ldots$ f) $-18.333\ldots$ g) $25.\overline{15}$ h) $3.01232323\ldots$

i) $0.121121\ldots$ j) $6.3\overline{544}\ldots$ k) $25.44\overline{1775}$ l) $0.056\overline{2345}\ldots$

3) Determinar si el número dado es racional o irracional.

a) $\frac{212}{7}$ b) $\sqrt[5]{3}$ c) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

d) $13.232323\ldots$ e) $8+\sqrt{8}$ f) $7\sqrt{5}-\sqrt{5}$

g) $\frac{4\pi+3}{2}$ h) $5.\overline{4} \div 0$ i) $\sqrt{-4}$

j) $\frac{0}{\sqrt{5}}$ k) $\sqrt[4]{\sqrt{27}\,\sqrt{3}}$ l). $\frac{3.2+\pi}{2\pi}$

m) $\sqrt[5]{32}$ n) $\sqrt{.04}\ -.04$ ñ). 0^0

Ejercicios II

1) Contestar cierto o falso.

a) $|-19| = 19.$ b) $|17-25| = 17-25.$ c) $|-5^2| = 5^2.$

d) $\left|(-5)^2\right| = (-5)^2.$ e) $\left|\pi - \sqrt{2}\right| = \pi - \sqrt{2}.$ f) $|0| = -0.$

g) $|x-1| \geq x-1.$ h) $|x^2-4| = x^2+4.$ i) $\left|\frac{-3}{x^2}\right| = 3x^{-2}.$

j) $|3-y| = y-3$ para $y < 3.$

k) $|z| = -z$ para z negativo.

Ejercicios III

1) Evaluar cada expresión para los valores dados a sus variables. No olvide simplificar.

a) $-3x^4+2x^3-x+5$ para $x = -2.$

b) $\frac{|4-x^2|}{2x+1} - \frac{1}{2x}$ para $x = 3.$

c) $\frac{x-2y-3z}{x+2y+3z}$ para $x = 1,$ $y = 2$ y $z = 3.$

d) $\sqrt[3]{x^2+y}$ para $x = 10$ y $y = 25.$

e) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ para $r = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ y $h = 6.$

f) $\left(sin\ t\right)^2 + \left(cos\ t\right)^2$ donde $sin\ t = \frac{-1}{2}$ y $cos\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para $a = -1$, $b = -10$, y $c = -9$.

h) $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$ para $x = 125$ y $y = 8$.

i) $2x^2 - 3y + 5z$ para $x = z - 2$ y $y = z + 1$.

j) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ y $s = \frac{a+b+c}{2}$.

2) Determinar el dominio de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $\sqrt{2x-10}$ b) $4x^5 - 2x$ c) $\frac{7x-2}{3x+5}$ d) $\frac{7x-2}{x^2+5}$

e) $\sqrt[3]{3x-9}$ f) $x^5 - \frac{2x}{3x}$ g) $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ h) $\frac{2x+\frac{x+5}{2x-15}}{x-4}$

i) $\sqrt{10x-1} + \frac{1}{x}$ j) $\frac{-3x+2}{\sqrt{x+2}}$ k) $\frac{8x-12}{\sqrt[3]{2x+4}}$ l) $\frac{7x-2}{|x+1|}$

m) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x+5}}$ n) $\frac{2}{x^2-9}$ ñ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x+6}$ o) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+10}$