Repaso de Geometría

Preliminares:

En esta sección trabajaremos con los siguientes temas:

I. El Teorema de Pitágoras.

II. Fórmulas básicas de geometría: perímetro, área y volumen.

I. El Teorema de Pitágoras.

Un *triángulo rectángulo* es uno con un ángulo recto o de medida de 90 grados (90°.) Algunos datos básicos sobre estos triángulos son:

1) Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°, en un triángulo rectángulo hay, además del ángulo recto, dos *ángulos agudos** y estos son *complementários***.

* ángulo agudo → su medida es positiva y menor que 90°.

** ángulos complementários → la suma de sus medidas es 90°.

2) La *hipotenusa* de un.triángulo rectángulo es el lado opuesto al ángulo recto. Como el ángulo recto es el ángulo más grande, la hipotenusa es el lado mayor del triángulo. Los otros dos lados son los *catetos* del triángulo rectángulo. Ver la Figura 1 a continuación.

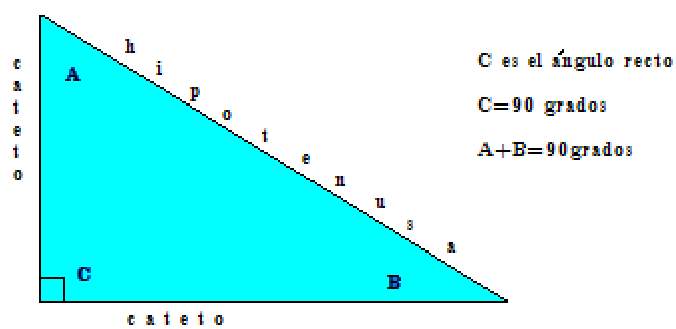


FIGURA 1

Ahora formulamos el teorema:

Teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo,
$c^2 = a^2 + b^2$ donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.

Notas:

1) El converso del Teorema de Pitágoras también es cierto. Esto es:
Si en un triángulo con lados a, b y c tenemos $c^2 = a^2 + b^2$ entonces, el triángulo es rectángulo. (Debe estar claro que c es el lado mayor.)

2) Cuando usamos el Teorema de Pitágoras no importa cual cateto se denota por a y cual por b.

3) Usualmente tendremos que resolver una ecuación del tipo $*^2 = D$ donde $*$ es la desconocida y D es un número fijo. Si $\# \geq 0$ la ecuación tiene dos soluciones dadas por $* = \pm\sqrt{D}$. Como en este ambiente sabemos que el valor buscado $*$ es positivo descartaremos la solución negativa y pasaremos, sin mas,a $* = \sqrt{D}$.

Ejemplo 1:

a) Determinar la hipotenusa de un triángulo rectángulo con un cateto de medida 5 y otro de 12.

Solución: Denotando, como en el teorema, a la hipotenusa por c y a los catetos por a y b, tenemos $a = 5$, $b = 12$ y $c^2 = a^2 + b^2$. Así,

$$\begin{aligned} c^2 &= 5^2 + 12^2 \\ c^2 &= 25 + 144 \\ c^2 &= 169 \\ c &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

La medida de la hipotenusa es 13.

b) En un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 60 y un cateto 40, determine la medida del otro cateto.

Solución: Hipotenusa: $c = 60$. Catetos: $a = 40$ y $b = ?$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 60^2 &= 40^2 + b^2 \\ 3,600 &= 1,600 + b^2 \\ b^2 &= 3,600 - 1,600 \\ b^2 &= 2,000 \\ b &= \sqrt{2,000} = 10\sqrt{20}. \end{aligned}$$

La medida del cateto buscado es $10\sqrt{20}$.

c) Las medidas de los lados de un triángulo son: 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si dicho triángulo tiene un ángulo de medida 60°, determine la medida de los otros dos ángulos.

Solución: La clave para resolver este ejercicio es notar que el triángulo en consideración tiene un ángulo recto. Veamos,

$1^{\underline{ro}}$: El lado mayor es el que mide 1 ($1 = \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$.)

$2^{\underline{do}}$: Usando el converso del Teo. de Pitágoras llegamos a la conclusión deseada ya que

$$a^2 + b^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{4}{4} = 1 = 1^2 = c^2.$$

Ahora tenemos un ángulo de 60° (dado) uno de 90° así que el otro ángulo debe medir $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

II. Fórmulas básicas de geometría.

En esta parte trabajaremos primeramente con las fórmulas de área para triángulos y rectángulos; el perímetro de un polígono; el área de un disco y la circunferencia de un círculo; el volumen de una caja rectangular (ortoedro) y luego área de superficie y el volumen de cilíndros y esferas.

1) **Fórmula para el área de un triángulo**:

$$A = \tfrac{1}{2}bh$$

donde A es el área, b es la base y h es la altura correspondiente a la base.

Ver la figura 2.

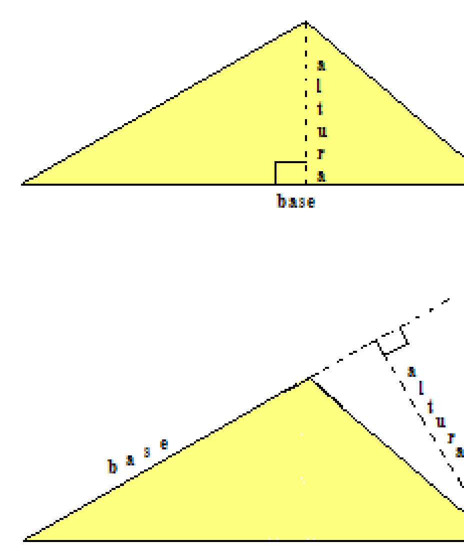


FIGURA 2

Ejemplo 2:

a) Determinar el área de un triángulo con base 15 y altura 22.

Solución: Tenemos base $b = 15$, altura $h = 22$ y área $A = ?$

$$A = \tfrac{1}{2}bh$$
$$A = \tfrac{1}{2}(15)(22)$$
$$A = \tfrac{330}{2} = 165$$

b) Determinar la base de un triángulo con área 50 y altura 16.

Solución: Tenemos área $A = 50$, altura $h = 8$ y base $b = ?$

$$A = \tfrac{1}{2}bh$$
$$50 = \tfrac{1}{2}(b)(8)$$
$$50 = 4b$$
$$b = \tfrac{50}{4}$$
$$b = \tfrac{25}{2} \quad \text{ó} \quad 12.5.$$

c) Determinar el área del triángulo en la figura 3.

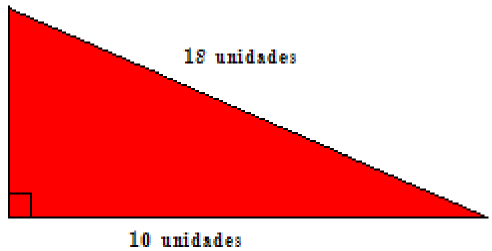


FIGURA 3

Solución: Tenemos un triángulo con base 10 y altura correspondiente desconocida, pero el triángulo es un triángulo rectángulo con hipotenusa 18. Usando el Teo. de Pitágoras podemos obtener la altura. (Note que la altura es un cateto del triángulo.)

$$\begin{aligned} 18^2 &= h^2 + 10^2 \\ 324 &= h^2 + 100 \\ h^2 &= 324 - 100 \\ h^2 &= 224 \\ h &= \sqrt{224} \\ h &= 4\sqrt{14}\,. \end{aligned}$$

Ahora tenemos base $b = 10,$ altura $h = 4\sqrt{14}$ y área $A = ?$

$$A = \tfrac{1}{2}(10)\left(4\sqrt{14}\right)$$

$$A = 5\left(4\sqrt{14}\right) = 20\sqrt{14}$$

El área del triángulo es $20\sqrt{14}$ unidades cuadradas.

2) **Fórmula para el área de un rectángulo**:

$$A = bh$$

donde A es el área, b es la base y h es la altura .

Ver la figura 4.

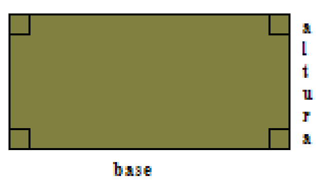


FIGURA 4

Ejemplo 3:

a) Determinar el área de un rectángulo con base 18 y altura 12.35 .

Solución: Tenemos base $b = 18$ y altura $h = 12.35$ y área $A = ?$

$$A = bh$$
$$A = 18(12.35)$$
$$A = 222.3$$

b) Determinar la altura de un rectángulo con área $3\pi^2$ y base 9π.

Solución: Tenemos área $A = 3\pi^2$, base $b = 9\pi$ y altura $h = ?$

$$3\pi^2 = 9\pi h$$
$$h = \frac{3\pi^2}{9\pi}$$
$$h = \frac{\pi}{3} \ .$$

3) **El perímetro de un polígono**:

Un polígono es una figura geométrica cerrada delimitada por segmentos de recta.
El perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados. Ver la figura 5.

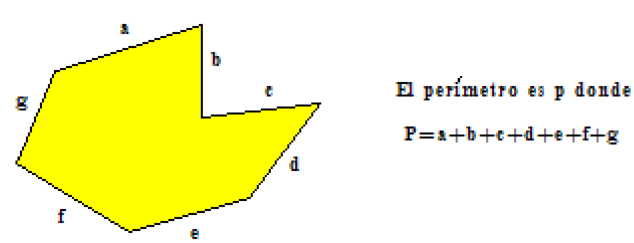


FIGURA 5

Ejemplo 4:

a) Determinar el perímetro del polígono en la figura 6.

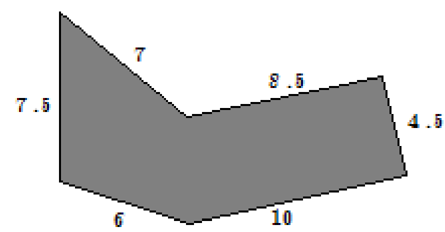


FIGURA 6

Solución: El perímetro P es:

$$P = 7.5 + 7 + 8.5 + 4.5 + 10 + 6$$
$$P = 43.5$$

b) Determinar el perímetro del polígono en la figura 7.

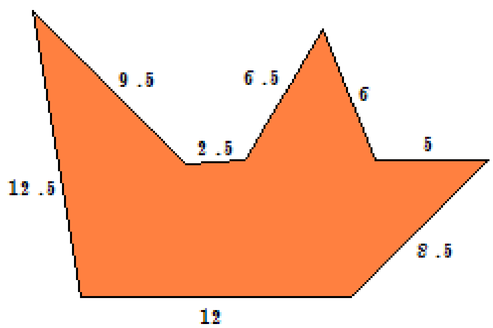


FIGURA 7

Solución: El perímetro P es:

$$P = 12.5 + 12 + 8.5 + 5 + 6 + 6.5 + 2.5 + 9.5$$
$$P = 62.5$$

4) **Fórmulas para el área de un disco y la circunferencia de un círculo**:

$A = \pi r^2$ y $C = 2\pi r$
donde A es el área del disco, C es la circunferencia
y r es el radio del círculo.

Ver la figura 8.

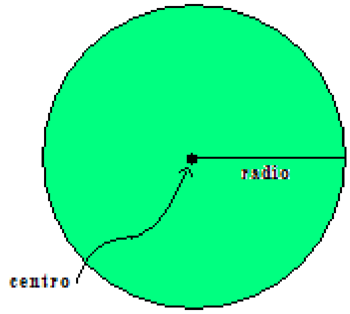


FIGURA 8

Ejemplo 5:

a) Determinar el área de un disco de radio $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Solución: El área A es:

$$A = \pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$A = \pi\frac{5^2\left(\sqrt{3}\right)^2}{2^2}$$
$$A = \pi\frac{25(3)}{4} = \frac{75\pi}{4}$$

b) Determinar el radio de un disco con área 225.

Solución: Tenemos $A = 225$ y $A = \pi r^2$. El radio r es:

$$225 = \pi r^2$$
$$r^2 = \frac{225}{\pi}$$
$$r = \sqrt{\frac{225}{\pi}}$$
$$r = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{\pi}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$$

racionalizando el denominador $r = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = \frac{5\sqrt{5\pi}}{\pi}$.

c) Determinar el radio de un círculo cuya circunferencia mide $3,600\pi$.

Solución: Tenemos $C = 3,600\pi$ y $C = 2\pi r$. El radio r es:

$$3,600\pi = 2\pi r$$
$$r = \frac{3,600\pi}{2\pi}$$
$$r = 1,800 .$$

d) Determinar el área de la región en la figura 9.

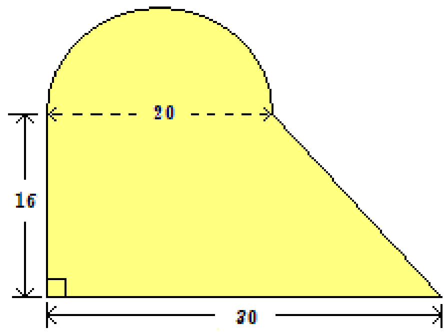


FIGURA 9

Solución: Para obtener el área de una región como esta debemos cortarla como se muestra en la figura 10:

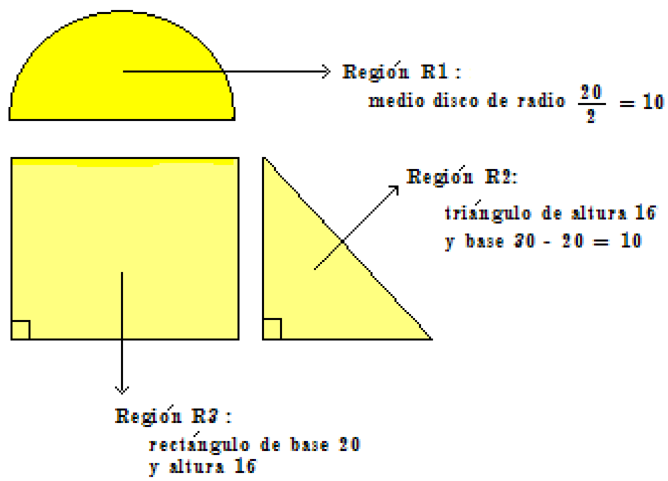


FIGURA 10

El área de la región es : $A = R1 + R2 + R3 = \left[\tfrac{1}{2}\pi(10)^2\right] + \left[\tfrac{1}{2}(10)(16)\right] + [20(16)]$

$A = [50\pi] + [80] + [320] = 400 + 50\pi$ ó $50(8+\pi)$.

5) **Fórmula para el volumen de una caja rectángular**:

$$V = lah$$

donde V es el volumen de la caja, l es la longitud de la base, a es el ancho y h es la altura.

Ver la figura 11.

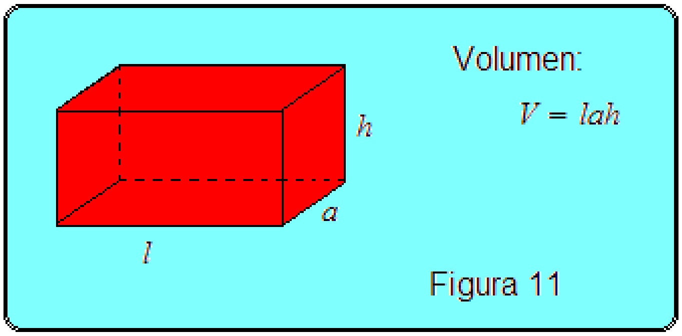


Figura 11

Ejemplo 6:

a) Determinar el volumen de una caja rectangular cuya base mide 10 , su ancho es 12 y su altura es 14 .

Solución: El volumen V es:

$$V = 10(12)(14) = 1,680 .$$

b) Determinar la altura de una caja rectangular cuya base mide $3\sqrt{2}$, su ancho es 5 y su volumen es 100.

Solución: Tenemos $V = 100$, $l = 3\sqrt{2}$, $a = 5$ y $V = lah$. La altura l es:

$$100 = \left(3\sqrt{2}\right)(5)l$$

$$100 = 15\sqrt{2}\,l$$

$$l = \frac{100}{15\sqrt{2}}$$

$$l = \frac{20}{3\sqrt{2}}$$

racionalizando el denominador $l = \frac{20}{3\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{6} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$.

6) Fórmulas para el volumen y el área de superficie de una esfera:

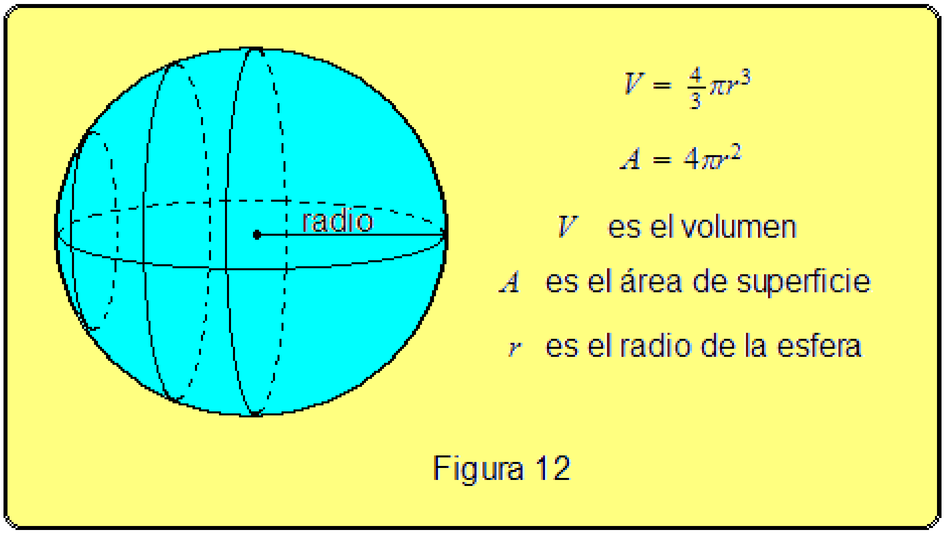


Figura 12

Ejemplo 7:

a) Determinar el volumen de una esfera de radio $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Solución: El volumen V es:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{64}\right) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{32}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{24} .$$

b) Determinar el área de superficie de una esfera de radio 7.2 .

Solución: El área A es:

$$A = 4\pi(7.2)^2$$

$$A = 4\pi(51.8) = 207.2\pi .$$

c) Determinar el volumen de una esfera cuya área de superficie es 400 .

Solución: Tenemos $A = 400$ y $A = 4\pi r^2$, así que $400 = 4\pi r^2$. Resolvemos la ecuación por r para obtener el radio de la esfera.

$$400 = 4\pi r^2$$

$$r^2 = \frac{400}{4\pi}$$

$$r^2 = \frac{100}{\pi}$$

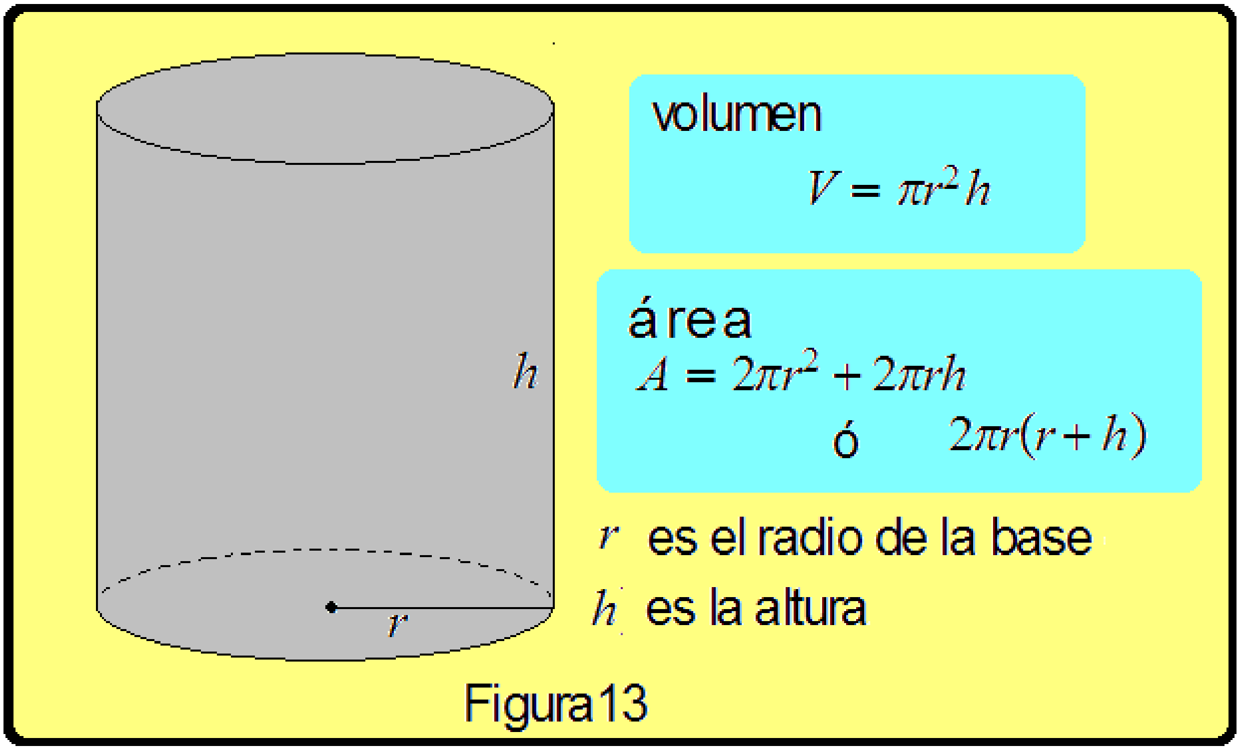
$$r = \frac{10}{\sqrt{\pi}} \,.$$

Ahora determinamos el volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{10}{\sqrt{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}000}{\pi\sqrt{\pi}}\right)$$

$$V = \frac{4{,}000}{3\sqrt{\pi}} = \frac{4{,}000\sqrt{\pi}}{3\pi} \,.$$

7) **Fórmulas para el volumen y el área de superficie de un cilindro**:



NOTA: El lector debe notar que el volumen del cilindro es el producto del área de la base por la altura y que en la fórmula del área el sumando $2\pi r^2$ corresponde al área de las dos "tapas" circulares y el otro sumando $2\pi rh$ el área de la superficie lateral. Además, el área de la superficie lateral es el producto de la circunferencia de la base por la altura.

Ejemplo 8:

a) Determinar el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio 2.5 y cuya altura es 3.

Solución: El volumen V es:

$$V = \pi(2.5)^2(3) = 18.75\pi$$

b) Determinar el área de superficie de un cilindro cuya base tiene radio $3\sqrt{2}$ y cuya altura es 6.

Solución: El área A es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \text{donde} \quad r = 3\sqrt{2} \ \text{ y } \ h = 6\sqrt{2}\ ,$$

$$A = 2\pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 + 2\pi\left(3\sqrt{2}\right)\left(6\sqrt{2}\right)$$

$$A = 2\pi(18) + 2\pi(36) = 36\pi + 72\pi = 108\pi$$

$$A \approx 339.29 \quad \text{(unidades cuadradas)}$$

c) Determinar el radio de la base de un cilindro cuya área de superficie es 15π metros cuadrados dado que el diámetro de la base es 4 veces la altura.

Solución: Tenemos, área $A = 15\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

donde r es el radio y h es la altura.

Además, si d es el diámetro, $d = 4h$ y $d = 2r$. Por lo tanto $4h = 2r$ ó $h = \frac{r}{2}$.

Así, sustituyendo $h = \frac{r}{2}$ en $15\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ obtenemos:

$$15\pi = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$15\pi = 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$15\pi = 3\pi r^2$$

$$5 = r^2$$

$$r = \sqrt{5}$$

el radio es $\sqrt{5} \approx 2.2361$ metros.

Ejercicios I

1) La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene medida $\sqrt{58}$ y uno de sus catetos mide 3 . Determine la medida del otro cateto.

2) Determinar la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen medidas 5 y 12 .

3) Las medidas de los lados de un triángulo son: 2.5, 2 y 1 . ¿Será dicho triángulo un triángulo rectángulo?

4) Un triángulo rectángulo isósceles tiene hipotenusa 2 .¿Cuál es la medida de sus dos lados iguales?

5) Un globo de aire calientese encuentra a una altura de 300 pies sobre un punto A en el Valle de Lajas. A una distancia de 500 pies (en el mismo valle) se encuentra el punto B. Determinar la distancia d entre el globo y el punto B. Ver la figura 14 .

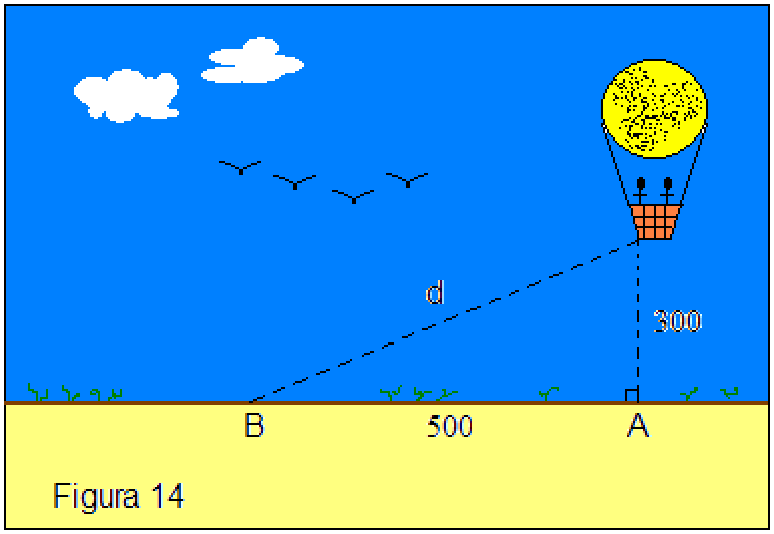


Figura 14

6) La distancia entre el extremo superior de una torre de comunicaciones y el extremo de su sombra es 85 metros. La longitud de la sombra de la torre es 80 metros. Ver la figura 15.

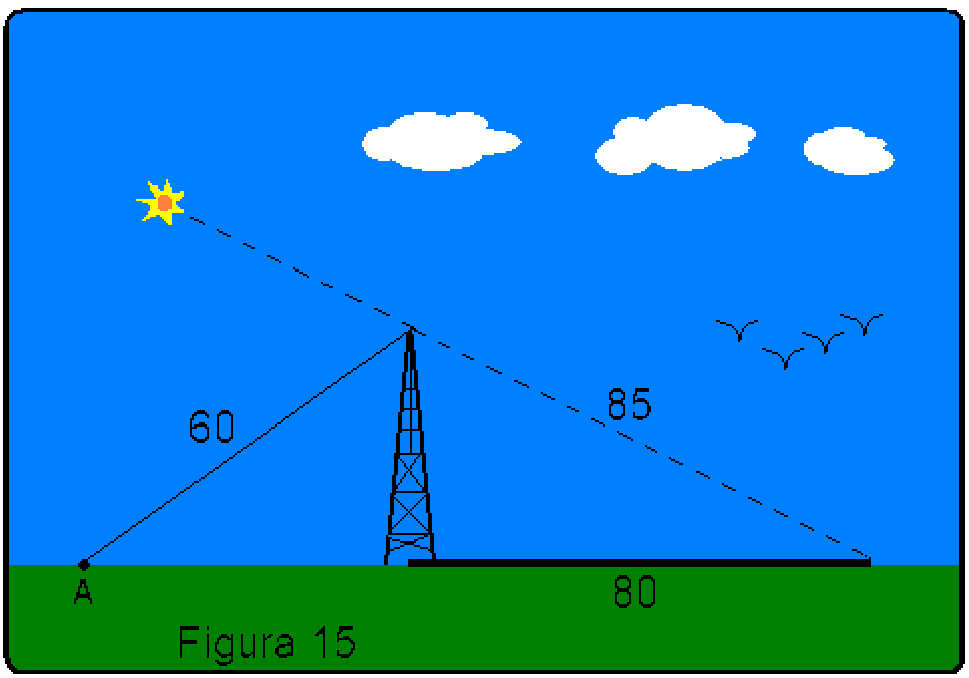


Figura 15

a) Determinar la altura de la torre.

b) Al otro lado un cable de 60 metros ayuda a sostener la torre. Si el cable va desde el extremo superior de la torre hasta un punto A en el suelo, determinar la distancia entre A y la base de la torre.

Ejercicios II

1) Determinar el área de un triángulo con altura 6 y base 22.
2) Determinar el área de un rectángulo con base $7\sqrt[3]{4}$ y altura $5\sqrt[3]{2}$.
3) Determinar el área de un círculo cuyo radio es $\frac{4}{5}$.
4) ¿Cuál es la base de un triángulo cuya altura es 5 y su área es 105 ?
5) ¿Cuál es el radio de un círculo con área 400π ?
6) Determinar el diámetro de un círculo cuya circunferencia es $\frac{108\pi}{3}$.
7) El radio de la Tierra es aproximadamente $4,000$ millas. Suponer que la Tierra es una esfera perfecta .
   a) Determinar el área de superficie de la Tierra.
   b) Determinar la longitud del Ecuador.

8) Determinar el volumen de una caja rectangular cuya base mide $\frac{5}{3}$, su ancho es $\frac{9}{25}$ y su altura es $\frac{20\pi}{3}$.

9) Determinar el ancho de una caja rectangular cuya base mide 12.5 , su altura es 16.125 y su volumen es 44.25 .

10) Determinar el radio y el área de superficie de una esfera cuyo volumen es $72\pi\sqrt[3]{2}$ pies cúbicos.

11) Determinar el área de superficie y el volumen de una esfera con radio 5 .
12) Determinar el área de superficie y el volumen de una esfera con radio $12\sqrt[3]{36}$.
13) Determinar el volumen y el área de superficie de un cilindro cuya base tiene un radio 3π y cuya altura es $2\pi^3$.

14) Determinar el área de superficie de un cilindro cuya base tiene radio $3\sqrt{2}$ y cuya altura es 6 .

15) Determinar la altura de un cilindro cuya área de superficie es 40π dado que la altura es 6 veces el radio de la base.

16) Determinar el área de la base de un cilindro cuya altura es 4 metros y su volumen es $2.25\pi^3$ metros cúbicos.

17). Determine el perimetro de cada polígono en la figura 16.

18) En la región 1 de la figura 16 un círculo menor interseca a uno mayor en solamente un punto y también pasa por su centro. Encontrar el área de la parte gris dado que el círculo mayor tiene diámetro $\frac{10}{3}$.

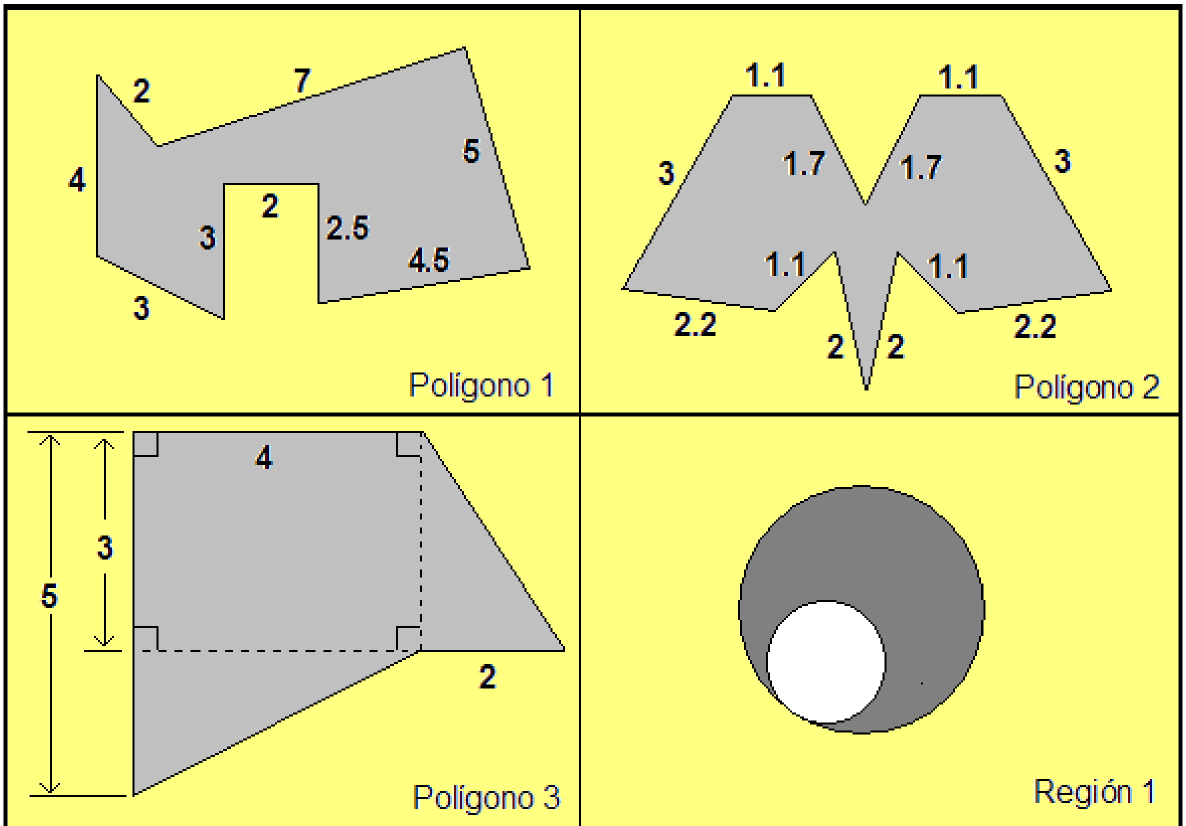


Figura 16